1.) Man berechne $\int_1^\infty 2x\cdot e^{-x}\,dx$.

<u>Lösung:</u> <u>a)</u> Wir berechnen zunächst eine Stammfunktion von $x\cdot e^{-x}$: Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\int \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{g'}\,dx = \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{(-e^{-x})}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{(-e^{-x})}_{g}\,dx =$$

$$= -x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} = \underline{\underline{-(x+1)\cdot e^{-x}}}$$

<u>b)</u> Nun berechnen wir das uneigentliche Integral:

$$\int_1^\infty 2x\cdot e^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^c 2x\cdot e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left(-2(x+1)\right)\cdot e^{-x}\Big|_1^c = 2\cdot\lim_{c\to\infty}\left(-(c+1)e^{-c}+2e^{-1}\right) =$$

$$-2\cdot\lim_{c\to\infty}\frac{c+1}{e^c} + \frac{4}{e} = \underline{\underline{\frac{4}{e}}},$$ denn nach der Regel von l'Hospital gilt:

$$\lim_{c\to\infty}\frac{c+1}{e^c} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{e^c} = \frac{1}{\infty} = 0$$

2.) Man berechne mittels Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{x+5}{x^2-4}\,dx, \quad x>2.$$

(6 Punkte)

<u>Lösung:</u> Wir machen für die <u>Partialbruchzerlegung</u> den <u>Ansatz:</u>

$$\frac{x+5}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Multiplikation mit x^2-4 liefert:

$$x+5 = A\cdot(x+2) + B\cdot(x-2)$$

Einsetzen von $x=2$ liefert: $A = \frac{7}{4}$

Einsetzen von $x=-2$ liefert: $B = -\frac{3}{4}$.

Also haben wir:

$$\int \frac{x+5}{x^2-4}\,dx = \int\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{7}{4}\cdot\int\frac{dx}{x-2} - \frac{3}{4}\cdot\int\frac{dx}{x+2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{7}{4}\cdot\ln(x-2) - \frac{3}{4}\cdot\ln(x+2) + C, \quad x>2.}}$$

3.) Man bestimme alle Punkte der Kurve

$$2x^2 - 4xy + 9y^2 = 36,$$

in denen die Tangenten den Anstieg 1 haben.

(5 Punkte)

<u>Lösung:</u> Wir setzen $F(x,y) = 2x^2 - 4xy + 9y^2 - 36$.

Für eine durch $F(x,y) = 0$ implizit definierte Funktion $y = y(x)$ gilt dann:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x-4y}{-4x+18y} = \frac{2y-2x}{9y-2x}.$$

Die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 1$ liefert daher

$$2y - 2x = 9y - 2x, \quad \text{also } y = 0.$$

Einsetzen in $F(x,y) = 0$ ergibt

$$2x^2 - 36 = 0, \quad \text{also } 2x^2 = 36 = 4 \cdot 9,$$

$$x^2 = 2 \cdot 9, \quad {}_1x_2 = \pm\sqrt{2} \cdot \sqrt{9} = \pm 3\sqrt{2}.$$

Dies liefert die beiden Punkte

$$\underline{\underline{P_1 = (3\sqrt{2}, 0)}}, \quad \underline{\underline{P_2 = (-3\sqrt{2}, 0)}}.$$