Runde 7, Beispiel 43

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.12.2006

1 Angabe

Man löse das RWP

$$y''(x) = 3x - 2; \qquad y(0) = 2; y'(1) = -3$$

2 Theoretische Grundlagen: Randwertaufgaben

Definition: Treten in der Bestimmungsgleichung für die eindeutige Charakterisierung der Lösung einer DGL Auswertungen der gesuchten Funktion und deren Ableitungen nicht nur an einer Stelle (wie beim AWP), sondern an zwei Stellen $a \neq b$ auf, dann spricht man von einer **Randwertaufgabe (RWA)** bzw. von einem **Randwertproblem (RWP)**.
Allgemeines Prinzip zur Lösung von RWA/RWP:

- Auffinden der allgemeinen Lösung der gegebenen DGL (mit Parametern $c_1, c_2, \ldots, c_n$)
- Anpassen der Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ durch Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Lösung

$\Rightarrow$ Gleichungssystem $c_1, c_2, \ldots, c_n$
Spezialfall: DGL ist linear und Randbedingungen sind auch Linear $\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem für $c_1, c_2, \ldots, c_n$.
Falls nichtlineare RWA/RWP, so ist das Problem i.A. wesentlich komplizierter.
Für die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b, a < b$$

tritt meist eine der vier folgenden Randbedingungen auf:

(1)	$y(a) = r_1$	$y(b) = r_2$	1. Art
(2)	$y'(a) = r_1$	$y'(b) = r_2$	2. Art
(3)	$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = r_1$	$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = r_2$	3. Art
(4)	$y(a) = y(b)$	$y'(a) = y'(b)$	Period. Randbed.

$$(r_1, r_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

In (1),(2) und (3) treten in jeder Gleichung nur die Werte für ein Intervallende auf (Randbedingungen sind separier).
Fall (4) führt mit $T = b - a$ zu T-periodischen Lösungen, falls $f(x, y, y')$ ebenfalls T-periodisch in x ist.

3 Lösung des Beispiels

Zunächst integrieren wir zwei Mal:

$$y''(x) = 3x - 2$$
$$y'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + c_1$$
$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + c_1 x + c_2$$

Einsetzen der Randbedingung $y(0) = 2$ ergibt $c_2 = 2$.
Einsetzen der Randbedingung $y'(1) = -3$ ergibt $c_1 = -\frac{5}{2}$.
Lösung ist somit:

$$\mathbf{y(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{x}x + 2}$$

Runde 7, Beispiel 44

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.12.2006

1 Angabe

Man löse das nichtlineare RWP

$$yy'' + (y')^2 = 0 \qquad y(-1) = 0; y'(1) = 1$$

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Theoretische Grundlagen: Autonome Differentialgleichungen

Konkretes Anwendungsbeispiel: Nichtlineare Schwingungen. Die untenstehende, autonome (= von der Zeit t unabhängige) Differentialgleichung tritt z.B. immer dann auf, wenn die Zustandsänderung x'' einer skalaren Grösse x nur vom Zustand (x, x') und nicht von der Zeit t abhängt.
Lösungsverfahren für die autonome Differentialgleichung: $'' = f(x, x'), x(t_0) = x_0, x'(t_0) = v_0$:

1. Sämtliche Nullstellen η von $f(\eta, 0) = 0$ bestimmen. $x(t) = \eta$ ist jeweils partikuläre Lösung (Ruhelage)

2. Substitution $x' = v$, $x'' = v \cdot v'$ ergibt für $v(x)$ die Differentialgleichung

$$v \cdot v' = f(x, v)$$

3. Allgemeine Lösung $v(x) = v(x, c_1)$, $c_1 \in \mathbb{R}$ bestimmen

4. Anfangswertproblem c_1 aus $v_0 = v(x_0, c_1)$ berechnen

5. Allgemeine implizite Lösung ist

$$t + c_2 = \int \frac{d\xi}{v(\xi, c_1)}$$

6. Implizite Lösung des Anfangswertproblems:

$$t + c_0 = \int \frac{d\xi}{v(\xi, c_1)}$$

2.2 Randwertaufgaben

Definition: Treten in der Bestimmungsgleichung für die eindeutige Charakterisierung der Lösung einer DGL Auswertungen der gesuchten Funktion und deren Ableitungen nicht nur an einer Stelle (wie beim AWP), sondern an zwei Stellen $a \neq b$ auf, dann spricht man von einer **Randwertaufgabe (RWA)** bzw. von einem **Randwertproblem (RWP)**.
Allgemeines Prinzip zur Lösung von RWA/RWP:

- Auffinden der allgemeinen Lösung der gegebenen DGL (mit Parametern $c_1, c_2, \ldots, c_n$)
- Anpassen der Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ durch Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Lösung

$\Rightarrow$ Gleichungssystem $c_1, c_2, \ldots, c_n$
Spezialfall: DGL ist linear und Randbedingungen sind auch Linear $\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem für $c_1, c_2, \ldots, c_n$.
Falls nichtlineare RWA/RWP, so ist das Problem i.A. wesentlich komplizierter.
Für die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b, a < b$$

tritt meist eine der vier folgenden Randbedingungen auf:

(1)	$y(a) = r_1$	$y(b) = r_2$	1. Art
(2)	$y'(a) = r_1$	$y'(b) = r_2$	2. Art
(3)	$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = r_1$	$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = r_2$	3. Art
(4)	$y(a) = y(b)$	$y'(a) = y'(b)$	Period. Randbed.

$$(r_1, r_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

In (1),(2) und (3) treten in jeder Gleichung nur die Werte für ein Intervallende auf (Randbedingungen sind separier).
Fall (4) führt mit $T = b - a$ zu T-periodischen Lösungen, falls $f(x, y, y')$ ebenfalls T-periodisch in x ist.

3 Lösung des Beispiels

Wir überführen die Differentialgleichung in eine trennbare:

$$y' \cdot y = x, \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$
$$y\ dx = c\ dx \qquad | \int$$
$$\frac{y^2}{2} = c_1 \cdot x + c_2$$
$$y = \sqrt{2xc_1 + 2c_2}$$

Einsetzen der Randbedingung $y(-1) = 0$ ergibt:

$$0 = \sqrt{2c_1 + 2c_2}$$

Daraus folgt, dass $c_1 = c_2$ gilt.
Einsetzen der Randbedingung $y'(1) = 1$:

$$y = \sqrt{2xc_1 + 2c_2}$$
$$y' = \frac{1}{2}(2xc_1 + 2c_2)^{-\frac{1}{2}} 2c_1$$
$$c_1 = c_2 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = c_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\mathbf{c_1} + \mathbf{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$$

Runde 7, Beispiel 45

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.12.2006

1 Angabe

Man betrachte das RWP

$$\ddot{y}(t) - y(t) = at + b \qquad y(0) = 0; y(1) = 0$$

für $a, b \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe des Alternativsatzes zeige man, dass das RWP für jede Wahl von a, b eindeutig lösbar ist.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Randwertaufgaben (allgemein)

Definition: Treten in der Bestimmungsgleichung für die eindeutige Charakterisierung der Lösung einer DGL Auswertungen der gesuchten Funktion und deren Ableitungen nicht nur an einer Stelle (wie beim AWP), sondern an zwei Stellen $a \neq b$ auf, dann spricht man von einer **Randwertaufgabe (RWA)** bzw. von einem **Randwertproblem (RWP)**.
Allgemeines Prinzip zur Lösung von RWA/RWP:

- Auffinden der allgemeinen Lösung der gegebenen DGL (mit Parametern $c_1, c_2, \ldots, c_n$)
- Anpassen der Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ durch Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Lösung

$\Rightarrow$ Gleichungssystem $c_1, c_2, \ldots, c_n$
Spezialfall: DGL ist linear und Randbedingungen sind auch Linear $\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem für $c_1, c_2, \ldots, c_n$.
Falls nichtlineare RWA/RWP, so ist das Problem i.A. wesentlich komplizierter.
Für die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b, a < b$$

tritt meist eine der vier folgenden Randbedingungen auf:

(1)	$y(a) = r_1$	$y(b) = r_2$	1. Art
(2)	$y'(a) = r_1$	$y'(b) = r_2$	2. Art
(3)	$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = r_1$	$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = r_2$	3. Art
(4)	$y(a) = y(b)$	$y'(a) = y'(b)$	Period. Randbed.

$$(r_1, r_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

In (1),(2) und (3) treten in jeder Gleichung nur die Werte für ein Intervallende auf (Randbedingungen sind separier).
Fall (4) führt mit $T = b - a$ zu T-periodischen Lösungen, falls $f(x, y, y')$ ebenfalls T-periodisch in x ist.

2.2 Lineare Randwertprobleme, Alternativsatz, Lösung des RWP

Seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$. Ein Randwertproblem mit einer linearen Differentialgleichung

$$L(y) = \sum_{v=0}^{n} p_v(x) \cdot y^{(v)} = q(x)$$

der Ordnung n und n linearen Randbedingungen

$$\begin{aligned} R_\mu(y(a)) &= \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_{v\mu} \cdot y^{(v)}(a) = \alpha_\mu, \qquad \mu = 1, \ldots, s \\ R_\mu(y(b)) &= \sum_{v=0}^{n-1} \beta_{v\mu} \cdot y^{(v)}(b) = \beta_\mu, \qquad \mu = s+1, \ldots, n \end{aligned}$$

heist ein **lineares Randwertproblem der Ordnung** n.
Dabei sind die stetigen Funktionen $p_v(x)$, $q(x)$ sowie die Zahlen $\alpha_{v\mu}$, $\beta_{v\mu}$, α_μ, β_μ gegeben.
Das lineare Randwertproblem heisst

- vollhomogen, falls $q(x) \equiv 0$ und $\alpha_\mu = 0$, $\beta_\mu = 0$ für alle μ gilt
- halbhomogen, falls entweder $q(x) \equiv 0$ oder alle $\alpha_\mu, \beta_\mu = 0$ sind
- inhomogen sonst.

Jedes inhomogene lineare Randwertproblem l¨asst sich folgendermaßen in ein halbhomogenes Randwertproblem umformen:

- Sei $\psi(x)$ eine spezielle L¨osung der Differentialgleichung. Es gilt also $L(\psi) = q(x)$. Mit dem Ansatz $y(x) = \psi(x) + z(x)$ ergeben sich für z die homogene Differentialgleichung $L(z) = 0$ und die neuen Randbedingungen

  $$\begin{aligned} R_\mu(z(a)) &= \tilde{\alpha}_\mu, \qquad \mu = 1, \ldots, s \\ R_\mu(z(b)) &= \tilde{\beta}_\mu, \qquad \mu = s+1, \ldots, n \end{aligned}$$

  mit $\tilde{\alpha}_\mu := R_\mu(\psi(a))$ und $\tilde{\beta}_\mu := \beta_\mu - R_\mu(\psi(b))$.

- Sei $\psi^*(x)$ eine Funktion, die die folgenden Randbedingungen erfüllt:

  $$\begin{aligned} R_\mu(\psi^*(a)) &= \alpha_\mu, \qquad 1 \le \mu \le s \\ R_\mu(\psi^*(b)) &= \beta_\mu, \qquad s+1 \le \mu \le n \end{aligned}$$

  Mit dem Ansatz $y(x) = \psi^*(x) + \omega(x)$ ergibt sich für ω die lineare Differentialgleichung

  $$L(\omega) = \tilde{q} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{q}(x) = q(x) - L(\psi^*)$$

und die homogenen Randbedingungen

$$R_\mu(\omega(a)) = 0, \qquad \mu = 1, \ldots, s$$
$$R_\mu(\omega(b)) = 0, \qquad \mu = s+1, \ldots, n$$

In beiden Fällen ist ein halbhomogenes Randwertproblem entstanden.

Zur Untersuchung der Lösbarkeit linearer Randwertprobleme können wir ohne Einschränkung stets von einem halbhomogenen Randwertproblem mit einer homogenen Differentialgleichung ausgehen. Es gilt der **Alternativsatz**: Ausgangspunkt sei das Randwertproblem aus mit $q(x) \equiv 0$. Es sei $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$, und es sei ferner

$$\triangle := \det R := \det \begin{pmatrix} R_1(y_1(a)) & \cdots & R_1(y_n(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ R_s(y_1(a)) & \cdots & R_s(y_n(a)) \\ R_{s+1}(y_1(b)) & \cdots & R_{s+1}(y_n(b)) \\ \vdots & & \vdots \\ R_n(y_1(b)) & \cdots & R_n(y_n(b)) \end{pmatrix}$$

sowie $\gamma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n)^T$.
Es gibt drei Alternativen:

- Ist $\triangle \neq 0$, dann ist das Randwertproblem eindeutig lösbar.
- Ist $\triangle = 0$ und gilt rg $R = \mathrm{rg}(R, \gamma)$, dann hat das Randwertproblem unendlich viele Lösungen.
- Ist $\triangle = 0$ und gilt rg $R < \mathrm{rg}(R, \gamma)$, dann ist das Randwertproblem unlösb ar.

Anmerkungen:

- Erinnerung an den Begriff des Ranges einer Matrix M: rg M (der Rang von M) ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten (oder Zeilen) der Matrix M. Ist a ein Spaltenvektor mit genauso viel Komponenten, wie M Zeilen besitzt, dann ist (M, a) die Matrix, die aus M durch Hinzufügen der Spalte a entsteht.
- Ist das Randwertproblem vollhomogen, dann existiert bei der ersten Alternative nur die triviale Lösung $y(x) \equiv 0$. Die dritte Alternative tritt nicht auf.

Zusammengefasst die **Schritte zur Lösung eines linearen Randwertproblemes**:

1. Man bestimme eine spezielle Lösung $\psi(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung $L(y) = q(x)$ und forme das Randwertproblem in ein halbhomogenes Randwertproblem mit homogener Differentialgleichung um.
2. Man berechne ein Fundamentalsystem aus Lösungen $\{z_1(x), \ldots, z_n(x)\}$ von $L(z) = 0$, bilde die Matrix R und den Vektor $\gamma = (\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_s, \tilde{\beta}_{s+1}, \ldots, \tilde{\beta}_n)^T$.

3. Im Falle der Lösbarkeit (ersten beiden Alternativen) löse man das lineare Gleichungssystem $R \cdot c = \gamma$ nach $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ auf.

4. Die gesuchte Lösung des Randwertproblems lautet nun:

$$y(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot z_k(x)$$

3 Lösung des Beispiels

Man betrachte das RWP

$$\ddot{y}(t) - y(t) = at + b \qquad y(0) = 0; y(1) = 0$$

für $a, b \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe des Alternativsatzes zeige man, dass das RWP für jede Wahl von a, b eindeutig lösbar ist.
Wir betrachten zunachst das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\lambda^2 = 1$, was die Lösungsbasis $\phi_1(t) = e^{-t}$ und $\phi_2(t) = e^t$ ergibt.
Nun wird die Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ gebildet:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} \\ -\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

R und S werden nach den Randbedingungen gebildet:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun wird die Matrix D berechnet:

$$D := R \cdot \Phi(a) + S \cdot \Phi(b) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-a} & \mathrm{e}^{a} \\ \mathrm{e}^{-b} & \mathrm{e}^{b} \end{pmatrix}$$

Die Determinante von D ist:

$$\|D\| = \mathrm{e}^{-a} \cdot \mathrm{e}^{b} - \mathrm{e}^{-a} \cdot \mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{b-a} - \mathrm{e}^{a-b}$$

a und b sind nicht die Randwerte, sondern 0 und 1 - die Determinante lautet:

$$\|D\| = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Damit ist das Randwertproblem eindeutig lösbar.

Runde 7, Beispiel 46

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 07.12.2006

1 Angabe

Man betrachte das inhomogene lineare RWP

$$L[y] := y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_(x)y(x) = b(x); \qquad R\vec{y}(a) + S\vec{y}(b) = \vec{p}$$

Man zeige nun: falls eine Funktion $\psi(x)$ die inhomogene Randbedingung erfüllt, also $R\vec{\psi}(a) + S\vec{\psi}(b) = \vec{p}$, dann führt die Substitution $z(x) := y(x) - \psi(x)$ auf ein halbhomogenes lineares Randwertproblem für die Funktion $z(x)$.

2 Theoretische Grundlagen: Randwertaufgaben (allgemein)

Definition: Treten in der Bestimmungsgleichung für die eindeutige Charakterisierung der Lösung einer DGL Auswertungen der gesuchten Funktion und deren Ableitungen nicht nur an einer Stelle (wie beim AWP), sondern an zwei Stellen $a \neq b$ auf, dann spricht man von einer **Randwertaufgabe (RWA)** bzw. von einem **Randwertproblem (RWP)**.
Allgemeines Prinzip zur Lösung von RWA/RWP:

- Auffinden der allgemeinen Lösung der gegebenen DGL (mit Parametern $c_1, c_2, \ldots, c_n$)
- Anpassen der Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ durch Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Lösung

$\Rightarrow$ Gleichungssystem $c_1, c_2, \ldots, c_n$
Spezialfall: DGL ist linear und Randbedingungen sind auch Linear $\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem für $c_1, c_2, \ldots, c_n$.
Falls nichtlineare RWA/RWP, so ist das Problem i.A. wesentlich komplizierter.
Für die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b, a < b$$

tritt meist eine der vier folgenden Randbedingungen auf:

(1)	$y(a) = r_1$	$y(b) = r_2$	1. Art
(2)	$y'(a) = r_1$	$y'(b) = r_2$	2. Art
(3)	$a_1y(a) + a_2y'(a) = r_1$	$b_1y(b) + b_2y'(b) = r_2$	3. Art
(4)	$y(a) = y(b)$	$y'(a) = y'(b)$	Period. Randbed.

$$(r_1, r_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

In (1),(2) und (3) treten in jeder Gleichung nur die Werte für ein Intervallende auf (Randbedingungen sind separier).
Fall (4) führt mit $T = b - a$ zu T-periodischen Lösungen, falls $f(x, y, y')$ ebenfalls T-periodisch in x ist.

2.1 Lineare Randwertprobleme, Alternativsatz, Lösung des RWP

Seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$. Ein Randwertproblem mit einer linearen Differentialgleichung

$$L(y) = \sum_{v=0}^{n} p_v(x) \cdot y^{(v)} = q(x)$$

der Ordnung n und n linearen Randbedingungen

$$R_\mu(y(a)) = \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_{v\mu} \cdot y^{(v)}(a) = \alpha_\mu, \qquad \mu = 1, \dots, s$$
$$R_\mu(y(b)) = \sum_{v=0}^{n-1} \beta_{v\mu} \cdot y^{(v)}(b) = \beta_\mu, \qquad \mu = s+1, \dots, n$$

heist ein **lineares Randwertproblem der Ordnung** n.
Dabei sind die stetigen Funktionen $p_v(x)$, $q(x)$ sowie die Zahlen $\alpha_{v\mu}$, $\beta_{v\mu}$, α_μ, β_μ gegeben.
Das lineare Randwertproblem heisst

- vollhomogen, falls $q(x) \equiv 0$ und $\alpha_\mu = 0$, $\beta_\mu = 0$ für alle μ gilt
- halbhomogen, falls entweder $q(x) \equiv 0$ oder alle $\alpha_\mu, \beta_\mu = 0$ sind
- inhomogen sonst.

Jedes inhomogene lineare Randwertproblem l¨asst sich folgendermaßen in ein halbhomogenes Randwertproblem umformen:

- Sei $\psi(x)$ eine spezielle L¨osung der Differentialgleichung. Es gilt also $L(\psi) = q(x)$. Mit dem Ansatz $y(x) = \psi(x) + z(x)$ ergeben sich für z die homogene Differentialgleichung $L(z) = 0$ und die neuen Randbedingungen

  $$R_\mu(z(a)) = \tilde{\alpha}_\mu, \qquad \mu = 1, \dots, s$$
  $$R_\mu(z(b)) = \tilde{\beta}_\mu, \qquad \mu = s+1, \dots, n$$

  mit $\tilde{\alpha}_\mu := R_\mu(\psi(a))$ und $\tilde{\beta}_\mu := \beta_\mu - R_\mu(\psi(b))$.

- Sei $\psi^*(x)$ eine Funktion, die die folgenden Randbedingungen erfüllt:

  $$R_\mu(\psi^*(a)) = \alpha_\mu, \qquad 1 \leq \mu \leq s$$
  $$R_\mu(\psi^*(b)) = \beta_\mu, \qquad s+1 \leq \mu \leq n$$

  Mit dem Ansatz $y(x) = \psi^*(x) + \omega(x)$ ergibt sich für ω die lineare Differentialgleichung

  $$L(\omega) = \tilde{q} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{q}(x) = q(x) - L(\psi^*)$$

und die homogenen Randbedingungen

$$R_\mu(\omega(a)) = 0, \qquad \mu = 1, \dots, s$$
$$R_\mu(\omega(b)) = 0, \qquad \mu = s+1, \dots, n$$

In beiden Fällen ist ein halbhomogenes Randwertproblem entstanden.

Zur Untersuchung der Lösbarkeit linearer Randwertprobleme können wir ohne Einschränkung stets von einem halbhomogenen Randwertproblem mit einer homogenen Differentialgleichung ausgehen. Es gilt der **Alternativsatz**: Ausgangspunkt sei das Randwertproblem aus mit $q(x) \equiv 0$. Es sei $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$, und es sei ferner

$$\triangle := \det R := \det \begin{pmatrix} R_1(y_1(a)) & \cdots & R_1(y_n(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ R_s(y_1(a)) & \cdots & R_s(y_n(a)) \\ R_{s+1}(y_1(b)) & \cdots & R_{s+1}(y_n(b)) \\ \vdots & & \vdots \\ R_n(y_1(b)) & \cdots & R_n(y_n(b)) \end{pmatrix}$$

sowie $\gamma = (\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n)^T$.
Es gibt drei Alternativen:

- Ist $\triangle \neq 0$, dann ist das Randwertproblem eindeutig lösbar.
- Ist $\triangle = 0$ und gilt rg $R = \text{rg}(R, \gamma)$, dann hat das Randwertproblem unendlich viele Lösungen.
- Ist $\triangle = 0$ und gilt rg $R < \text{rg}(R, \gamma)$, dann ist das Randwertproblem unlösb ar.

Anmerkungen:

- Erinnerung an den Begriff des Ranges einer Matrix M: rg M (der Rang von M) ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten (oder Zeilen) der Matrix M. Ist a ein Spaltenvektor mit genauso viel Komponenten, wie M Zeilen besitzt, dann ist (M, a) die Matrix, die aus M durch Hinzufügen der Spalte a entsteht.
- Ist das Randwertproblem vollhomogen, dann existiert bei der ersten Alternative nur die triviale Lösung $y(x) \equiv 0$. Die dritte Alternative tritt nicht auf.

Zusammengefasst die **Schritte zur Lösung eines linearen Randwertproblemes**:

1. Man bestimme eine spezielle Lösung $\psi(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung $L(y) = q(x)$ und forme das Randwertproblem in ein halbhomogenes Randwertproblem mit homogener Differentialgleichung um.
2. Man berechne ein Fundamentalsystem aus Lösungen $\{z_1(x), \dots, z_n(x)\}$ von $L(z) = 0$, bilde die Matrix R und den Vektor $\gamma = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s, \tilde{\beta}_{s+1}, \dots, \tilde{\beta}_n)^T$.

3. Im Falle der Lösbarkeit (ersten beiden Alternativen) löse man das lineare Gleichungssystem $R \cdot c = \gamma$ nach $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ auf.

4. Die gesuchte Lösung des Randwertproblems lautet nun:

$$y(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot z_k(x)$$

3 Lösung des Beispiels

$$L[y] = y^{(n)}(x) + \sum_{t=0}^{n-1} a_k(x) \cdot y^{(k)}(x) = b(x), \qquad R\vec{y}(a) + S\vec{y}(b) = \vec{p}$$

$$R\vec{\psi}(a) + S\vec{\psi}(b) = \vec{p}$$

$$z(x) = y(x) - \psi(x) \;\Rightarrow\; y(x) = z(x) + \psi(x)$$

$$L[y] = \underbrace{(z^{(n)}(x) + \varphi^{(n)}(x))}_{y^{(n)}} + \sum_{t=0}^{n-1} a_k(x) \cdot (z^{(k)}(x) + \varphi^{(k)}) = b(x)$$

$$\hat{L}[z] = z^{(n)}(x) + \sum_{t=0}^{n-1} a_k(x) \cdot z^{(k)}(x) = \hat{b}(x), \qquad \hat{b}(x) = b(x) - \varphi^{(n)}(x) - \sum_{t=0}^{n-1} a_k(x) \cdot \psi^{(k)}(x)$$

$$R(\vec{z}(a) + \vec{\psi}(a)) + S(\vec{z}(b) + \vec{\psi}(b)) = \vec{p}$$

$$R\vec{z}(a) + S\vec{z}(b) + \vec{p} = \vec{p} \;\Rightarrow\; \mathbf{R\tilde{z}(a) + S\tilde{z}(b) = \tilde{0}}$$

Runde 7, Beispiel 47

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.12.2006

1 Angabe

Man bestimme die Green-Funktion des Randwertproblems

$$y'' + y = b(x) \qquad y(0) - y(\pi) = 0; y'(0) - y'(\pi) = 0$$

2 Theoretische Grundlagen: Green-Funktion

Green-Funktion für RWP mit homogener Randbedingung: Ist $X(t)$ eine Fundamentalmatrix von $\dot{x} = A(t)x$ und $\det D \neq 0$ mit $D = RX(a) + SX(b)$, so besitzt das RWP

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad Rx(a) + Sx(b) = 0$$

die eindeutige Lösung

$$x(t) = \int_a^b G(t,\tau)b(\tau)\partial\tau$$

mit der Matrix-Funktion $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ der Gestalt:

$$G(t,\tau) = \begin{cases} X(t)[E - D^{-1}SX(b)]X(\tau)^{-1} & a \leq \tau \leq t \\ X(t)[-D^{-1}SX(b)]X(\tau)^{-1} & t < \tau \leq b \end{cases}$$

G ist die Green-Funktion des RWP.
Wenn ein halbhomogenes RWP eine Green-Funktion besitzt, kann durch Superposition einfach die Lösung des zugehörigen inhomogenen RWP errechnet werden. Ist $x(t)$ eine Lösung des RWP und $y(t)$ eine beliebige, leicht zu bestimmende Funktion, welche nur die Randbedingungen $Ry(a) + Sy(b) = r$ erfüllt, so genügt $z(t) := x(t) - y(t)$ dem halbhomogenen RWP

$$\dot{z} = Az + b(t) - (\dot{y}(t) - A(t)y(t)), \qquad Rz(a) + Sz(b) = 0$$

Lösung des inhomogenen RWP mit der Green-Funktion:

1. Suche ein $y(t)$, das nur den inhomogenen Randbedingungen $Ry(a) + Sy(b) = r$ genügt.

2. Berechnung der Green-Funktion G des zugehörigen halbhomogenen RWP

$$z(t) = \int_a^b G(t,\tau)(b(\tau) - \dot{y}(\tau) + A(\tau)y(\tau))\partial\tau$$

3. $x(t) = y(t) + z(t)$ ist die Lösung des RWP.

3 Lösung des Beispiels

Betrachten Randbedingungn $y(0) - y(\pi) = 0$:

$$c_1 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot \sin(0) - (\mathrm{d1} \cdot \cos(\pi) + \mathrm{d1} \cdot \sin(\pi)) = 0$$

Betrachten Randbedingung $y'(0) - y'(pi) = 0$. Beide Teile der Green Funktion muss man ableiten und dann einsetzen:

$$-c_1 \cdot \sin(0) + c_2 \cdot \cos(0) - (-\mathrm{d1} \cdot \sin(\pi) + \mathrm{d2} \cdot \cos(\pi)) = 0$$

Zwei weitere Gleichungen erhält man dann noch aus der 3. Bedingung für die Green-Funktion:

$$c_1 \cdot \cos(w) + c_2 \cdot \sin(w) = \mathrm{d1} \cdot \cos(w) + \mathrm{d2} \cdot \sin(w) - \mathrm{d1} \cdot \sin(w) + \mathrm{d2} \cdot \cos(w) - (-c_1 \cdot \sin(w) + c_2 \cdot \cos(w))$$

Man erhält die folgende Green-Funktion:

$$\mathbf{G(x,w)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sin(w) \cdot \cos(x) - \frac{1}{2} \cdot \cos(w) \cdot \sin(x) & 0 \leq x < w \\ -\frac{1}{2} \cdot \sin(w) \cdot \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(w) \cdot \sin(x) & w < x \leq \pi \end{cases}$$

Runde 7, Beispiel 48

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 07.12.2006

1 Angabe

Man bestimme die Green-Funktion des Randwertproblems

$$y'' = b(x) \qquad y(0) + y(l) = 0; y'(0) + y'(l) = 0$$

2 Theoretische Grundlagen: Green-Funktion

Green-Funktion für RWP mit homogener Randbedingung: Ist $X(t)$ eine Fundamentalmatrix von $\dot{x} = A(t)x$ und $\det D \neq 0$ mit $D = RX(a) + SX(b)$, so besitzt das RWP

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad Rx(a) + Sx(b) = 0$$

die eindeutige Lösung

$$x(t) = \int_a^b G(t,\tau)b(\tau)\partial\tau$$

mit der Matrix-Funktion $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ der Gestalt:

$$G(t,\tau) = \begin{cases} X(t)[E - D^{-1}SX(b)]X(\tau)^{-1} & a \leq \tau \leq t \\ X(t)[-D^{-1}SX(b)]X(\tau)^{-1} & t < \tau \leq b \end{cases}$$

G ist die Green-Funktion des RWP.
Wenn ein halbhomogenes RWP eine Green-Funktion besitzt, kann durch Superposition einfach die Lösung des zugehörigen inhomogenen RWP errechnet werden. Ist $x(t)$ eine Lösung des RWP und $y(t)$ eine beliebige, leicht zu bestimmende Funktion, welche nur die Randbedingungen $Ry(a) + Sy(b) = r$ erfüllt, so genügt $z(t) := x(t) - y(t)$ dem halbhomogenen RWP

$$\dot{z} = Az + b(t) - (\dot{y}(t) - A(t)y(t)), \qquad Rz(a) + Sz(b) = 0$$

Lösung des inhomogenen RWP mit der Green-Funktion:

1. Suche ein $y(t)$, das nur den inhomogenen Randbedingungen $Ry(a) + Sy(b) = r$ genügt.
2. Berechnung der Green-Funktion G des zugehörigen halbhomogenen RWP

$$z(t) = \int_a^b G(t,\tau)(b(\tau) - \dot{y}(\tau) + A(\tau)y(\tau))\partial\tau$$

3. $x(t) = y(t) + z(t)$ ist die Lösung des RWP.

3 Lösung des Beispiels

Es gilt:

$$L[y] = b(x),\ \ Ry(a) + Sy(b) = 0$$

Wir erhalten:

$$g(x, \omega) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{1}{4}, & 0 \le x < \omega \\ \frac{x}{2} - \frac{\omega}{2} - \frac{1}{4}, & \omega < x \le 1 \end{cases}$$

Lösungsbasis: $y(x) = c_1 \cdot x + c_2$ erhält man aus

$$y(x) = \int_a^b g(x, \omega) b(\omega)\, d\omega$$

Runde 7, Beispiel 49

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 06.12.2006

1 Angabe

Man bestimme alle reellen Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und die zugehörigen Eigenfunktionen des linearen Eigenwertproblems

$$y'' - \lambda^2 y = 0 \qquad y(1) = y(-1); y'(1) = y'(-1)$$

2 Theoretische Grundlagen: Lineares Eigenwertproblem

Spezielle Randwertprobleme, die von einem Parameter λ abhängen. Betrachte vollhomogenes lineares RWP. Die Existenz von nichttrivialer Lösung $y(x) = 0$ hängt von der Wahl des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ (oder $\lambda \in \mathbb{R}$) ab.
Definition: Jeder Wert λ, für den das vollhomogene RWP nichttriviale Lösungen besitzt, heißt Eigenwert. Die zugehörigen nichtrivialen Lösungen $y(x)$ heißen Eigenfunktionen zum Eigenwert λ.
Anmerkung: Aus dem Alternativsatz folgt: $\det D = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda$ ist Eigenwert.

3 Lösung des Beispiels

$$y'' - \lambda^2 \cdot y, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösen charakteristisches Polynom und bilden Fundamentalmatrix Φ:

$$\alpha^2 - \lambda^2 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \pm\lambda$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x & e^{-\lambda \cdot x} \\ \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} & -\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \end{pmatrix}$$

Wir berechnen, in Anlehnung an die Ausführungen zum Alternativsatz, die Determinante von $D = R \cdot \Phi(1) + S \cdot \Phi(-1)$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & e^{-\lambda} \\ \lambda \cdot e^{\lambda} & -\lambda \cdot e^{-\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & e^{\lambda} \\ \lambda \cdot e^{-\lambda} & -\lambda \cdot e^{\lambda} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & e^{-\lambda} \\ \lambda \cdot e^{\lambda} & -\lambda \cdot e^{-\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & -e^{\lambda} \\ -\lambda \cdot e^{-\lambda} & \lambda \cdot e^{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & e^{-\lambda} - e^{\lambda} \\ \lambda \cdot e^{\lambda} - \lambda \cdot e^{-\lambda} & -\lambda \cdot e^{-\lambda} + \lambda \cdot e^{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\det D = 2 \cdot \lambda \cdot (-e^{-\lambda} + e^{\lambda})^2 = 0$$

Wenn $\lambda = 0$ ist, existiert triviale Lösung. Wir berechnen nun c_1 und c_2:

$$y = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + c_2 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$
$$y = \lambda \cdot c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} - \lambda \dot{c}_2 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$
$$\lambda = 0 \ \Rightarrow y = c_1 + c_2, \ y' = 0$$
$$y(1) = y(-1) : \ c_1 + c_2 = c_1 + c_2$$

y' braucht nicht mehr betrachtet zu werden. c_1 und c_2 können beliebig gewählt werden.