Analysis 1 UE - Lösungsblatt der 3. Übung

17. (a) **Induktionsanfang:** Man überprüft die Richtigkeit der Aussage für $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 = 2^1. \quad \checkmark$$

Induktionsschritt: Dazu nehmen wir an, die Aussage sei wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Dieser Induktionsannahme zufolge gilt

$$\begin{aligned} 2^{n+1} = 2^n + 2^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] + 1 + 1, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei im ersten Schritt in der zweiten Summe der Index k um 1 verschoben wurde. Für die auftretenden Summanden rechnet man nach (geschickt erweitern):

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} + \frac{n!k}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n![(n+1-k)+k]}{k!(n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Einsetzen in (1) liefert (Beachte $1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1}$):

$$2^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] + 1 + 1 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}.$$

Damit haben wir den Induktionsschritt $n \to n+1$ durchgeführt, und zusammen mit dem Induktionsanfang folgt die Gültigkeit für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) **Induktionsanfang:** Für $n = 1$ überprüft man die Gültigkeit der Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}, \quad \checkmark$$

Induktionsschritt: Dazu nehmen wir an, die Gleichung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Unter Verwendung dieser Gleichung rechnet man nach:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Dies ist genau die Aussage für $n+1$. Damit ist der Induktionsschritt vollzogen, und die Aussage gilt $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) **Induktionsanfang:** Für $n = 1$ überprüft man die Gültigkeit der Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{1} q^k = 1 + q = \frac{q^2 - 1}{q - 1}, \quad \checkmark$$

Induktionsschritt: Unter der Annahme, die Gleichung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

rechnet man nach:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} \\
&= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} \\
&\frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} \\
&= \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.
\end{aligned}$$

Dies ist genau die Aussage für $n+1$. Damit ist der Induktionsschritt vollzogen, und die Aussage gilt $\forall n \in \mathbb{N}$.

(d) **Induktionsanfang:** Für $n = 1$ überprüft man die Gültigkeit der Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \checkmark$$

Induktionsschritt: Unter der Annahme, die Gleichung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

rechnet man nach:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Dies ist genau die Aussage für $n+1$. Damit ist der Induktionsschritt vollzogen, und die Aussage gilt $\forall n \in \mathbb{N}$.

18. Wir schreiben $M := \bigcap_{i\in I} M_i$. Zur Lösung muss man zwei Punkte überprüfen:

- Zeige, dass $1 \in M$. Laut Voraussetzung gilt M_i induktiv $\forall i \in I$, und so erhält man

$$\forall i \in I : 1 \in M_i \Leftrightarrow 1 \in M,$$

eine direkte Anwendung der Definition des Durchschnitts.

- Als zweiter Punkt muss gelten: $\forall m \in M : m+1 \in M$. Man verifiziert

$$\begin{aligned} m \in M &\Leftrightarrow m \in M_i,\ \forall i \in I \\ &\Rightarrow m+1 \in M_i,\ \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow m+1 \in M. \end{aligned}$$

Die zweite Zeile gilt wegen der Induktivität der einzelnen M_i.

19. Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion über $m \in \mathbb{N}$:

Induktionsanfang: Für $m = 1$ überprüft man leicht die Gültigkeit der Aussage:

$$a_1^n = \frac{n!}{n!} a_1^n,$$

da der einzige Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^1 = \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| = n$ gleich $\alpha = n$ ist.

Induktionsschritt: Zwecks späterer Verwendung sei die Binomialformel zu Beginn erwähnt:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{2}$$

Gelte nun die zu zeigende Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgert man:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i\right)^n &= \left(\left(\sum_{i=1}^{m-1} a_i\right) + (a_m + a_{m+1})\right)^n \qquad (m \text{ Summanden!}) \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m:|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \left(\prod_{i=1}^{m-1} a_i^{\alpha_i}\right) (a_m + a_{m+1})^{\alpha_m} \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m:|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \left(\prod_{i=1}^{m-1} a_i^{\alpha_i}\right) \sum_{k=0}^{\alpha_m} \binom{\alpha_m}{k} a_m^k a_{m+1}^{\alpha_m-k} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m:|\alpha|=n} \sum_{k=0}^{\alpha_m} \frac{n!}{\alpha!} \left(\prod_{i=1}^{m-1} a_i^{\alpha_i}\right) \binom{\alpha_m}{k} a_m^k a_{m+1}^{\alpha_m-k} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m:|\alpha|=n} \sum_{k=0}^{\alpha_m} \frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!} \cdot \frac{\alpha_m!}{k!(\alpha_m-k)!} \left(\prod_{i=1}^{m-1} a_i^{\alpha_i}\right) a_m^k a_{m+1}^{\alpha_m-k} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m:|\alpha|=n} \sum_{k=0}^{\alpha_m} \frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_{m-1}!k!(\alpha_m-k)!} \left(\prod_{i=1}^{m-1} a_i^{\alpha_i}\right) a_m^k a_{m+1}^{\alpha_m-k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Man erkennt, dass der neue Multiindex $\tilde{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, k, \alpha_m - k)$ in der Doppelsumme über alle möglichen Multiindizes $\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}_0^{m+1} : |\tilde{\alpha}| = n$ läuft. Man kann also unter Einführung von $\tilde{\alpha}$ die beiden Summationssymbole zu einem neuen zusammenfassen, und kann so (3) äquivalent umschreiben zu:

$$\left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i\right)^n = \sum_{\tilde{\alpha}\in\mathbb{N}_0^{m+1}:|\tilde{\alpha}|=n} \frac{n!}{\tilde{\alpha}!} \left(\prod_{i=1}^{m+1} a_i^{\tilde{\alpha}_i}\right),$$

womit der Induktionsschritt $n \to n+1$ vollzogen wäre.

20. (a) Als Beispiel kann man die linear geordnete Menge $(\mathbb{N}, \leq)$ verwenden, wobei "$\leq$" die übliche Ordungsrelation auf $\mathbb{N}$ bezeichnet. Die Mengen $A := \{1\}$ und $B := \mathbb{N}\backslash A = \{2, 3, \ldots\}$ definieren gemäß Angabe einen Dedekindschen Schnitt. Nun sind aber sowohl $c = 1$ als auch $c = 2$ Trennungszahlen von $(A|B)$, was die Eindeutigkeit derselben widerlegt.

    (b) Sei nun $(M, \leq)$ ein angeordneter Körper, und nehmen wir an, die Trennungszahl sei nicht eindeutig. D.h. es gibt zwei Trennungszahlen $c_1 \neq c_2$, und wegen der Linearität der Ordnungsrelation können wir o.E.d.A (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) annehmen, dass $c_1 < c_2 \Leftrightarrow c_1 - c_2 < 0$ gilt. Bezeichnet 1 das neutrale Element bezüglich der Multiplikation, so definieren wir $2 := 1 + 1 \in M$, und dessen multiplikatives Inverses[1] $\frac{1}{2} := 2^{-1}$. Damit können wir $z := \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \in M$ betrachten. Mit den Körperaxiomen erhält man

$$\begin{aligned} & c_1 < z \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_1 < \tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 \quad | + (-\tfrac{1}{2}c_1) \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{2}c_1 < \tfrac{1}{2}c_2 \quad | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow\ & c_1 < c_2, \end{aligned}$$

laut Annahme $c_1 < c_2$ eine wahre Aussage, also $c_1 < z$. Vollkommen analog zeigt man $z < c_2 \Leftrightarrow c_1 < c_2$. Damit haben wir gezeigt: $\exists z \in M : c_1 < z < c_2$. Da c_1, c_2 Trennungszahlen sind, folgert man weiter:

$$[\forall a \in A : a \leq c_1 \wedge c_1 < z \Rightarrow z \in B] \wedge [\forall b \in B : c_2 \leq b \wedge z < c_2 \Rightarrow z \in A] \Rightarrow z \in A \cap B.$$

Da laut Definition eines Dedekin-Schnittes $A \cap B = \emptyset$ gilt, ist dies ein Widerspruch! Also war die Annahme, dass mehrere verschiedene Trennungszahlen existieren, falsch, daher muss die Trennungszahl eindeutig sein.

21. (a) **Induktionsanfang:** Für $|M| = 1$ schreiben wir $M = \{m_1\}$, und auf Grund der Reflexivität der Ordnungsrelation gilt: $\forall m \in M : m \leq m_1 \Leftrightarrow m_1 \leq m_1$. ✓

    Induktionsschritt: Wir fixieren ein $n \in \mathbb{N}$ und nehmen an, alle n-elementigen, linear geordneten Mengen hätten ein größtes Element. Sei nun M_{n+1} eine Menge mit $|M_{n+1}| = n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und wir beschreiben M_{n+1} an Hand ihrer Elemente: $M_{n+1} = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$ mit $m_i \neq m_j$, $\forall i \neq j$. Wir betrachten nun die n-elementige Teilmenge $M_n = \{m_1, \ldots, m_n\} \subset M_{n+1}$. Laut Voraussetzung hat M_n ein größtes Element, wir bezeichnen es o.E.d.A. mit m_n, d.h. $m_i \leq m_n$, $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Nun muss wegen der Linearität der Ordnung in M_{n+1} einer der folgenden zwei[2] Fälle auftreten:

    - Falls $m_{n+1} < m_n$, dann ist m_n auch in M_{n+1} das größte Element.
    - Im Fall $m_n < m_{n+1}$ ist m_{n+1} auf Grund der Transitivität der Ordnung neues größtes Element.

    In beiden Fällen folgert man, dass auch M_{n+1} ein größtes Element haben muss, und zwar m_n bzw. m_{n+1}.

    (b) Man überlegt sich, dass in einem angeordneten Körper $0 < 1$ gelten müsste: Andernfalls findet man

$$1 < 0 \overset{+(-1)}{\Leftrightarrow} 0 < -1 \overset{(\mathrm{OK2})}{\Rightarrow} 0 < (-1)(-1) \Rightarrow 0 < 1,$$

ein Widerspruch.
Nehmen wir also an, der endliche Körper K sei angeordnet. Wegen Punkt (a) des Beispiels existiert ein größtes Element $m \in K$. Wegen der soeben gezeigten notwendigen Relation $0 < 1$ gilt nach Addition von m auf beiden Seiten (OK1): $m < m + 1 \in K$, ein Widerspruch dazu, dass m das größte Element ist.

[1] In einem angeordneten Körper gilt $1 + 1 \neq 0$, da man ansonsten einen Widerspruch erhält: Gelte $1 + 1 = 0$, dann folgt aus $0 < 1$ mit den Verträglichkeitsbedingungen $0 < 1 < 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 < 0$, ein Widerspruch.

[2] Der Fall $m_n = m_{n+1}$ scheidet aus, da wir die Elemente aus M_{n+1} als paarweise verschieden angenommen haben.

22. Wir benötigen folgende zwei Hilfsresultate:

Behauptung 1. *Für alle* $m, n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $m + n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir zeigen das Lemma mittels vollständiger Induktion über n : Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $\mathbb{N}$ induktiv ist folgt $m + 1 \in \mathbb{N}$, also die Gültigkeit der Aussage für $n = 1$. Nehmen wir nun an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: $m + n \in \mathbb{N}$. Damit folgert man: $m + n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m + n) + 1 \in \mathbb{N} \overset{\text{assoz.}}{\Leftrightarrow} m + (n + 1) \in \mathbb{N}$. Also $n + m \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. □

Behauptung 2 (Hinweis)**.** *Für alle* $m, n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$n > m \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = m + k. \tag{4}$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Aussage (4) wahr, da kein $m \in \mathbb{N}$ mit $m < 1$ existiert (siehe Vorlesung). Sei nun $n \in \mathbb{N}$, so dass Aussage (4) für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Für ein $m \in \mathbb{N}$ unterscheidet man nun drei Fälle:

- $m < n$: Laut Induktionsannahme existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = m + k \Leftrightarrow n + 1 = m + (k + 1)$, also $n + 1 = m + k'$ mit $k' = k + 1 \in \mathbb{N}$.
- $m = n$: Dies ist äquivalent zu $n + 1 = m + 1$, also $k' = 1$.
- $m > n$: Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, existiert zwischen $m - 1$ und m keine weitere natürliche Zahl, also ist $m > n \Leftrightarrow m - 1 \geq n \Leftrightarrow m \geq n + 1$. Also ist $m \not< n + 1$, und so die Aussage trivialerweise erfüllt. □

Abgeschlossenheit von $\mathbb{Z}$. Die zu beweisende Aussage lautet: $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m + n \in \mathbb{Z}$. Um das zu zeigen, unterscheiden wir vier Fälle für $m, n \in \mathbb{Z}$:

- $m = 0 \vee n = 0$: In diesem Fall gilt: $m + n = m \vee m + n = n$, und damit $m + n \in \mathbb{Z}$.
- $m, n \in \mathbb{N}$: Lemma 1 sagt aus, dass $m + n \in \mathbb{N}$, und damit $m + n \in \mathbb{Z}$.
- $m \in \mathbb{N}, -n \in \mathbb{N}$: Wir nehmen an, dass $m > -n$. Laut Lemma 2 existiert ein $k \in \mathbb{N} : m = k - n \Leftrightarrow m + n = k \in \mathbb{N} \Rightarrow m + n \in \mathbb{Z}$. Im Fall $m < -n$ erhält man analog $-(m + n) = k \in \mathbb{N} \Rightarrow m + n \in \mathbb{Z}$. Wegen der Kommutativität der Addition brauchen wir den Fall $n \in \mathbb{N}, -m \in \mathbb{N}$ nicht mehr extra zu betrachten.
- $-m, -n \in \mathbb{N}$: Daraus folgt, dass $(-m) + (-n) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -(m + n) \in \mathbb{N} \Rightarrow m + n \in \mathbb{Z}$.

23. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist die Existenz von Zahlen $a_{m,0}, \ldots, a_{m,m+1}$ zu zeigen, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = \sum_{l=0}^{m+1} a_{m,l} n^l, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Der Hinweis lässt sich direkt mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes beweisen:

$$\begin{aligned} d_{m,n} &= (n+1)^{m+1} - n^{m+1} \\ &= \sum_{l=0}^{m+1} \binom{m+1}{l} n^l - n^{m+1} \\ &= \sum_{l=0}^{m} \binom{m+1}{l} n^l + \underbrace{\binom{m+1}{m+1}}_{=1} n^{m+1} - n^{m+1} \\ &= \sum_{l=0}^{m} b_{m,l} n^l, \quad \text{mit } b_{m,l} = \binom{m+1}{l}. \end{aligned}$$

Außerdem erkennt man, dass $b_{m,m} = m+1 \neq 0$. Als nächstes betrachten wir die Summe aller $d_{m,n}$ über den Index n für fixes $m \in \mathbb{N}$, und beachten, dass diese Summe eine *Teleskopsumme* ist:

$$\begin{aligned}(n+1)^{m+1} &= ((n+1)^{m+1} - n^{m+1}) + (n^{m+1} - (n-1)^{m+1}) + \cdots + (1^{m+1} - 0) \\ &= \sum_{i=0}^{n} d_{m,i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} b_{m,l} i^l = \sum_{l=0}^{m} b_{m,l} \sum_{i=0}^{n} i^l. \end{aligned} \tag{6}$$

Nun können wir die zu zeigende Aussage mittels vollständiger Induktion über m beweisen.

Induktionsanfang: Für $m = 1$ wissen wir Aufgabe 17 (b) zufolge, dass

$$\sum_{i=0}^{n} i^m = \frac{1}{2} n^2 + \frac{n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also die Gültigkeit der Aussage (5) für $m = 1$ mit $a_{1,0} = a_{1,1} = \frac{1}{2}$.

Induktionsschritt: Für ein $M \in \mathbb{N}$ setzen wir nun die Gültigkeit von Aussage (5) für alle Potenzen $m \leq M-1$ voraus, also die Existenz von Koeffizienten $a_{m,l}$, sodass folgende Darstellung gilt (Induktionsvoraussetzung):

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = \sum_{l=0}^{m+1} a_{m,l} n^l, \quad \forall m \leq M-1, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Setzt man diese Darstellung in (6) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(n+1)^{M+1} &= \sum_{m=0}^{M-1} b_{M,m} \sum_{i=0}^{n} i^l + b_{M,M} \sum_{i=0}^{n} i^M \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} b_{M,m} \sum_{l=0}^{m+1} a_{m,l} n^l + b_{M,M} \sum_{i=0}^{n} i^M \\ \Leftrightarrow b_{M,M} \sum_{i=0}^{n} i^M &= (n+1)^{M+1} - \sum_{l=0}^{M} c_{M,l} n^l \end{aligned} \tag{8}$$

mit $c_{M,l} = \sum_{m=l-1}^{M-1} b_{M,m} a_{m,l}$ für $l \geq 1$ und $c_{M,0} = \sum_{m=0}^{M-1} b_{M,m} a_{m,0}$. Wendet man den Binomischen Lehrsatz bei $(n+1)^{M+1}$ an, so erhält man weiter aus (8)

$$b_{M,M} \sum_{i=0}^{n} i^M = n^{M+1} + \sum_{l=0}^{M} [b_{M,l} - c_{M,l}] n^l.$$

Definiert man für $m = M : a_{m,m+1} := b_{m,m}^{-1}$ und $a_{m,l} := b_{m,m}^{-1}(b_{m,l} - c_{m,l})$, $\forall l \leq m$, so haben wir folgende Darstellung gefunden:

$$\sum_{i=0}^{n} i^m = \sum_{l=0}^{m+1} a_{m,l} n^l, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } m = M,$$

also die Gültigkeit der Aussage (5) für $m = M$. Damit ist der Induktionsschritt $M-1 \to M$ vollzogen.

24. (a) Wir nehmen gemäß Angabe an, dass $l, m, n \in \mathbb{N}$, und $0 < k \leq n < m$. Unter Verwendung der Definition des Binomialkoeffizienten erhält man:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &\leq \binom{m}{k}\frac{1}{m^k} \\ \Leftrightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} &\leq \frac{m\cdot(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k} \\ \Leftrightarrow \frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-k+1)}{n} &\leq \frac{m}{m}\cdot\frac{(m-1)}{m}\cdots\frac{(m-k+1)}{m} \end{aligned} \tag{9}$$

Für $k = 1$ gilt offenbar Gleichheit, für $k > 1$ und $0 < l \leq k-1$ kann man die Faktoren einzeln vergleichen:

$$\frac{n-l}{n} < \frac{m-l}{m} \Leftrightarrow \frac{l}{m} < \frac{l}{n} \Leftrightarrow n < m,$$

eine wahre Aussage. Multipliziert man diese Ungleichungen für alle $0 < l < k$ so folgt mit dem wiederholten Anwenden des Monotoniegesetzes in $\mathbb{R}$ die Ungleichung (9), die, wie oben gezeigt, äquivalent zur zu zeigenden Aussage ist.

(b) Man kann auf $(1+\frac{1}{n})^n$ bzw. $(1+\frac{1}{m})^m$ jeweils den Binomischen Lehrsatz anwenden:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}, \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} \tag{10}$$

Laut Punkt (a) kann man die Summanden für alle $k \leq n < m$ einzeln vergleichen:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \binom{m}{k}\frac{1}{m^k},$$

wobei die Ungleichung für $k > 1$ sogar strikt ist. Mit Hilfe des Monotoniegesetzes folgert man für die Summe über k folgende Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k},$$

wobei auf beiden Seiten nur n Summanden sind. Wegen $n < m$ ist nun die Summe der fehlenden Terme auf der rechten Seite positiv:

$$\sum_{k=n+1}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} > 0,$$

und man folgert damit weiter

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} < \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} + \sum_{k=n+1}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k}.$$

Nun ersetzt man die Summen gemäß Gleichungen (10) durch die ursprünglichen Ausdrücke, womit die zu zeigende Ungleichung bewiesen ist.

(c) Zuerst zeigen wir die linke Ungleichung:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dazu schreiben wir die linke Seite wieder wie in (10) als Summe, und vergleichen dann paarweise die Summanden beider Seiten: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ hat man

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &\leq \frac{1}{k!} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-k+1)}{n} &\leq \frac{1}{k!}, \\ \Leftrightarrow \frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-k+1)}{n} &\leq 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Wegen

$$\frac{n-l}{n} < 1 \Leftrightarrow l > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 < l \leq n,$$

folgt die Richtigkeit von (11) und damit auch die Ungleichung für die zugehörige Summe:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die zweite zu zeigende Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

kann man unter Verwendung einer geeigneten geometrischen Reihe zeigen (vgl. Beispiel 17.(c)). Für $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ findet man

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{k!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{k} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{(k-1)\text{ mal}} = \frac{1}{2^{k-1}} = 2\frac{1}{2^k}.$$

Aufsummieren über alle $k \leq n$ liefert (Summanden für $k = 0, 1$ kommen dazu)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq -1 + 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \overset{17(c)}{=} -1 + 4\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < -1 + 4 = 3.$$

In der allerletzten Abschätzung erkennt man auch, dass die Ungleichung strikt ist.