# 2. Übungsblatt (mit Lösungen)

**3.0 VU Formale Modellierung**

Lara Spendier, Gernot Salzer

13. November 2011

## Aufgabe 1

Berechnen und beschreiben Sie die folgenden Sprachen.

(a) $L_1 := ((\{\mathtt{a}, \mathtt{ab}, \mathtt{cc}\} \cup \{\varepsilon\}) \cdot (\{\varepsilon, \mathtt{bb}\} \cup \{\mathtt{b}\})) \cup \{\mathtt{c}\}$

(b) $L_2 := \{\mathtt{0}\}^* \cdot (\{\mathtt{0}\} \cup \{\varepsilon\})$

(c) $L_3 := (\{\mathtt{1}\}^* \cdot \{\mathtt{1}\}^+) \cdot \{\mathtt{1}\}^*$

(d) $L_4 := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{ab}\} \cdot \{\}$

(e) $L_5 := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{ab}\} \cup \{\}$

### Lösung

(a) $$\begin{aligned} L_1 &= ((\{\mathtt{a}, \mathtt{ab}, \mathtt{cc}\} \cup \{\varepsilon\}) \cdot (\{\varepsilon, \mathtt{bb}\} \cup \{\mathtt{b}\})) \cup \{\mathtt{c}\} \\ &= (\{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{ab}, \mathtt{cc}\} \cdot \{\varepsilon, \mathtt{b}, \mathtt{bb}\}) \cup \{\mathtt{c}\} \\ &= \{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{ab}, \mathtt{abb}, \mathtt{abbb}, \mathtt{b}, \mathtt{bb}, \mathtt{cc}, \mathtt{ccb}, \mathtt{ccbb}\} \cup \{\mathtt{c}\} \\ &= \{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{ab}, \mathtt{abb}, \mathtt{abbb}, \mathtt{b}, \mathtt{bb}, \mathtt{c}, \mathtt{cc}, \mathtt{ccb}, \mathtt{ccbb}\} \end{aligned}$$

(b) $L_2 = \{\mathtt{0}\}^* \cdot (\{\mathtt{0}\} \cup \{\varepsilon\}) = \{\mathtt{0}\}^* \cdot \{\mathtt{0}\} \cup \{\mathtt{0}\}^* \cdot \{\varepsilon\} = \{\mathtt{0}\}^+ \cup \{\mathtt{0}\}^* = \{\mathtt{0}\}^*$

(c) $L_3 = (\{\mathtt{1}\}^* \cdot \{\mathtt{1}\}^+) \cdot \{\mathtt{1}\}^* = \{\mathtt{1}\}^+ \cdot \{\mathtt{1}\}^* = \{\mathtt{1}\}^+$

(d) $L_4 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{ab}\} \cdot \{\} = \{\}$

(e) $L_5 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{ab}\} \cup \{\} = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{ab}\}$

## Aufgabe 2

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der alle E-Mail-Adressen beschreibt, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Sie enden auf *@logic.at* .

- Vor dem @-Zeichen steht mindestens ein Buchstabe oder eine Ziffer.
- Der Teil links des @-Zeichens besteht nur aus Buchstaben und Ziffern.
- Das erste Zeichen der E-Mail-Adresse ist ein Buchstabe.

(a) Geben Sie den gesuchten regulären Ausdruck in algebraischer Notation an.

(b) Geben Sie den gesuchten regulären Ausdruck in `egrep`-Notation an. (Gesucht sind alle Zeilen, die *ausschließlich* eine E-Mail-Adresse enthalten.)

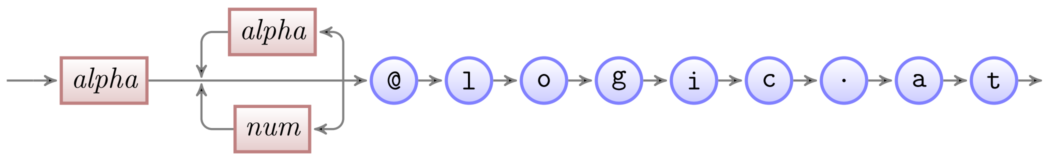
(c) Zeichnen Sie das Syntaxdiagramm, das Ihrem regulären Ausdruck aus Teil a entspricht.

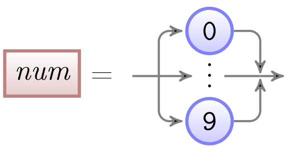
### Lösung

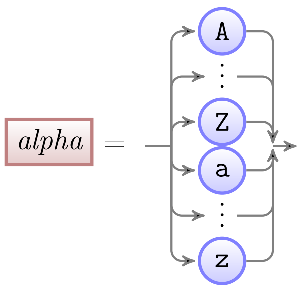
(a) $alpha := \mathtt{A} + \cdots + \mathtt{Z} + \mathtt{a} + \cdots + \mathtt{z}$
$num := \mathtt{0} + \cdots + \mathtt{9}$
Regulärer Ausdruck: $alpha(alpha + num)^*$`@logic.at`

(b) `^[a-zA-Z][a-zA-Z0-9]*@logic\.at$` oder
`^[:alpha:][:alnum:]*@logic\.at$`

(c) Syntaxdiagramm zu $alpha(alpha + num)^*$`@logic.at`:




## Aufgabe 3

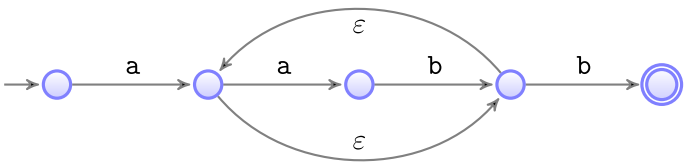
Konstruieren Sie endliche Automaten, die dieselbe Sprache beschreiben wie die folgenden regulären Ausdrücke.

(a) $\mathtt{a(ab)}^*\mathtt{b}$

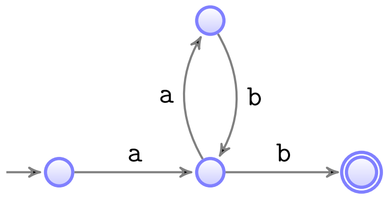
(b) $\mathtt{(a+ba+bb)(a+b)}^*$

## Lösung

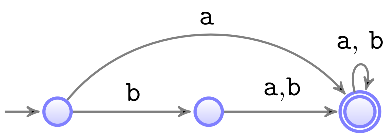
(a) `a(ab)*b`




oder

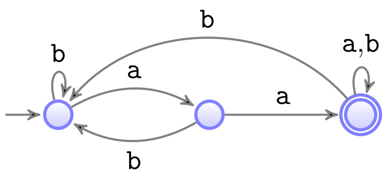



(b) `(a+ba+bb)(a+b)*`



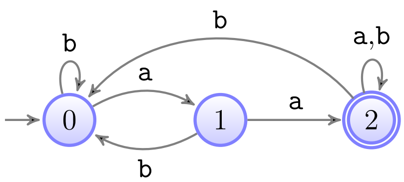

# Aufgabe 4

Konstruieren Sie zu folgendem endlichen Automaten einen regulären Ausdruck.

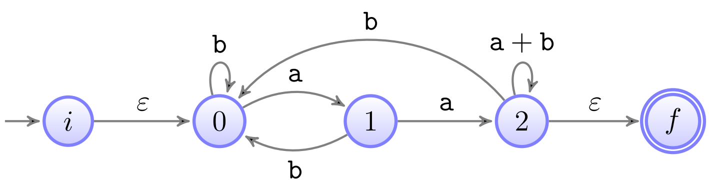



## Lösung

Ausgangsautomat:

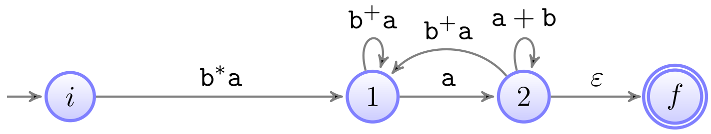



Neuer Anfangs- und Endzustand:

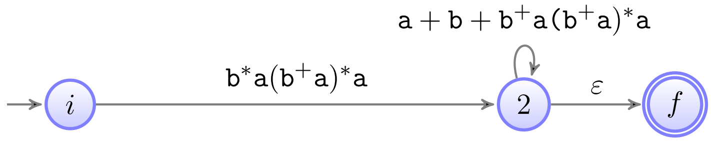



Wir eliminieren die Zustände in der Reihenfolge 0, 1 und 2; andere Reihenfolgen sind ebenfalls möglich.

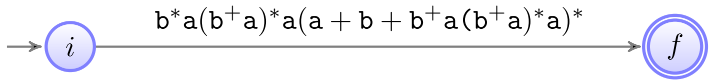
Elimination von Zustand 0:




Elimination von Zustand 1:




Elimination von Zustand 2:




Da $(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*$ bereits alle möglichen Wörter über $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ enthält, gilt $(\mathtt{a}+\mathtt{b}+\cdots)^* = (\mathtt{a}+\mathtt{b})^*$, der reguläre Ausdruck vereinfacht sich damit zu

$$\mathtt{b}^*\mathtt{a}(\mathtt{b}^+\mathtt{a})^*\mathtt{a}(\mathtt{a}+\mathtt{b})^* \ .$$

Ein dazu äquivalenter Ausdruck ist

$$\mathtt{b}^*(\mathtt{a}\mathtt{b}^+)^*\mathtt{aa}(\mathtt{a}+\mathtt{b})^* \ ,$$

da $\mathtt{a}(r\mathtt{a})^* = (\mathtt{a}r)^*\mathtt{a}$ für beliebige reguläre Ausdrücke $r$ gilt. Diese Sprache lässt sich beschreiben als die Menge aller Wörter über $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$, die $\mathtt{aa}$ enthalten, was wiederum dem Ausdruck

$$(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*\mathtt{aa}(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*$$

entspricht. Das Teilwort $\mathtt{aa}$ steht für ein beliebiges Vorkommen irgendwo im Wort, während es im Ausdruck $\mathtt{b}^*(\mathtt{a}\mathtt{b}^+)^*\mathtt{aa}(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*$ das erste Vorkommen darstellt.

## Aufgabe 5

Gegeben sei die Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit den Nonterminalen $N = \{S, R, C, W\}$, den Terminalen $T = \{\mathtt{0}, \ldots, \mathtt{9}, \mathtt{a}, \ldots, \mathtt{z}, \mathtt{<}, \mathtt{>}, \mathtt{/}\}$ und folgender Menge $P$ von Ersetzungsregeln:

$$\begin{aligned}
S &\to \texttt{<table>}\, R \,\texttt{</table>} \\
R &\to R\, R \mid \texttt{<tr>}\, C \,\texttt{</tr>} \\
C &\to C\, C \mid \texttt{<td>}\, W \,\texttt{</td>} \\
W &\to \mathtt{0}W \mid \cdots \mid \mathtt{9}W \mid \mathtt{a}W \mid \cdots \mid \mathtt{z}W \mid \varepsilon
\end{aligned}$$

Überprüfen Sie für die nachfolgenden Wörter, ob sie aus dem Startsymbol $S$ ableitbar sind. Falls ja, geben Sie eine Parallelableitung an. Falls nein, argumentieren Sie, warum nicht.

(a) <table><tr><td>a</td></tr><tr><td>c</td><td></td></tr></table>

(b) <table><tr><tr><td>a</td><td>8674</td></tr></tr></table>

### Lösung

(a) Ja, ist ableitbar. Parallelableitung:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow_P \texttt{<table>}\, R\, \texttt{</table>} \\
&\Rightarrow_P \texttt{<table>}\, R\, R\, \texttt{</table>} \\
&\Rightarrow_P \texttt{<table><tr>}\, C\, \texttt{</tr><tr>}\, C\, \texttt{</tr></table>} \\
&\Rightarrow_P \texttt{<table><tr><td>}\, W\, \texttt{</td></tr><tr>}\, C\, C\, \texttt{</tr></table>} \\
&\Rightarrow_P \texttt{<table><tr><td>a}\, W\, \texttt{</td></tr><tr><td>}\, W\, \texttt{</td><td>}\, W\, \texttt{</td></tr></table>} \\
&\Rightarrow_P \texttt{<table><tr><td>a</td></tr><tr><td>c}\, W\, \texttt{</td><td></td></tr></table>} \\
&\Rightarrow_P \texttt{<table><tr><td>a</td></tr><tr><td>c</td><td></td></tr></table>}
\end{aligned}
$$

(b) Nein, dieses Wort ist nicht ableitbar, da die Ersetzungsregeln keine Verschachtelung von <tr> $\cdots$ </tr> erlauben. Die Zeichenfolge <tr> kann nur durch die Regel $R \rightarrow$ <tr>$C$</tr> eingeführt werden. Alle Wörter, die aus $C$ abgeleitet werden können, beginnen mit <td>, d.h., auf <tr> folgt immer <td>.

## Aufgabe 6

Eine *Tabelle* im Textsystem LaTeX beginnt mit `\begin{tabular}`, gefolgt von einer Positionsangabe, gefolgt von mehreren Tabellenzeilen (mindestens aber einer), die voneinander durch `\\` getrennt sind, und endet mit `\end{tabular}`. Eine *Positionsangabe* besteht aus einer Spaltenangabe, der optional `[b]` oder `[t]` vorangehen kann. Eine *Spaltenangabe* ist eine nicht-leere Folge der Buchstaben `c`, `l` und `r`, die in geschwungenen Klammern eingeschlossen ist. Eine *Tabellenzeile* besteht aus einer Folge von Tabelleneinträgen, die voneinander durch das Zeichen `&` getrennt sind. Ein *Tabelleneintrag* besteht aus einer möglicherweise leeren Abfolge von Texten und Tabellen. Ein *Text* ist eine nicht-leere Folge von Buchstaben, Ziffern, Leerzeichen und Punkten.

Beispiel einer derartigen Tabelle:

```
\begin{tabular}[t]{lc}
  Eintrag 11 & Eintrag 12 \\
  Eintrag 21 & \begin{tabular}{rr}
                 Eintrag 22 & ist selber\\
                 eine       & Tabelle.
               \end{tabular}\\
  Eintrag 31 & Eintrag 32
\end{tabular}
```

(a) Geben Sie für die Sprache der LaTeX-Tabellen eine kontextfreie Grammatik in EBNF an. Verwenden Sie so weit wie möglich EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu halten.

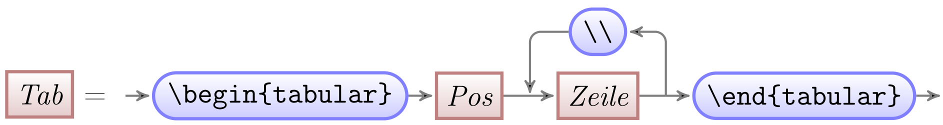
(b) Geben Sie für Ihre Grammatik ein Syntaxdiagramm an.

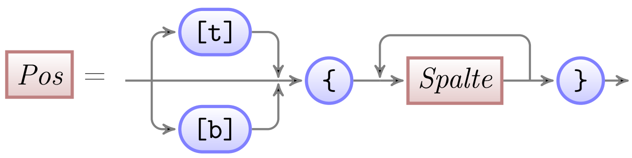
## Lösung

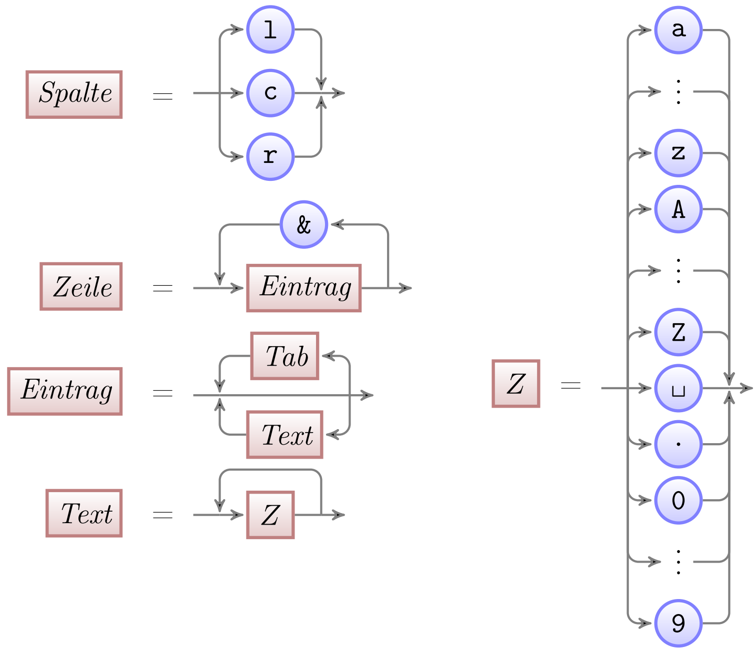
(a) $\langle V, T, P, S\rangle$, wobei

$$
\begin{aligned}
V &= \{\,\mathit{Tab},\ \mathit{Pos},\ \mathit{Spalte},\ \mathit{Zeile},\ \mathit{Eintrag},\ \mathit{Text},\ Z\} \\
T &= \{\texttt{0},\dots,\texttt{9},\texttt{a},\dots,\texttt{z},\texttt{A},\dots,\texttt{Z},\ \texttt{.},\texttt{\textvisiblespace},\texttt{\{},\texttt{\}},\ \texttt{[},\texttt{]},\texttt{\&},\texttt{\textbackslash}\} \\
P &= \{ \quad \mathit{Tab} \to \texttt{"\textbackslash begin\{tabular\}"}\ \mathit{Pos}\ \mathit{Zeile}\ \{\,\texttt{"\textbackslash\textbackslash"}\ \mathit{Zeile}\,\}\ \texttt{"\textbackslash end\{tabular\}"} \\
&\qquad \mathit{Pos} \to [\,\texttt{"[b]"} \mid \texttt{"[t]"}\,]\quad \texttt{"\{"}\ \mathit{Spalte}\ \{\,\mathit{Spalte}\,\}\ \texttt{"\}"} \\
&\qquad \mathit{Spalte} \to \texttt{"l"} \mid \texttt{"c"} \mid \texttt{"r"} \\
&\qquad \mathit{Zeile} \to \mathit{Eintrag}\ \{\,\texttt{"\&"}\ \mathit{Eintrag}\,\} \\
&\qquad \mathit{Eintrag} \to \{\ \mathit{Tab} \mid \mathit{Text}\,\} \\
&\qquad \mathit{Text} \to Z\ \{\,Z\,\} \\
&\qquad Z \to \texttt{"0"} \mid \cdots \mid \texttt{"9"} \mid \texttt{"A"} \mid \cdots \mid \texttt{"Z"} \mid \texttt{"a"} \mid \cdots \mid \texttt{"z"} \mid \texttt{"."} \mid \texttt{"\textvisiblespace"}\ \} \\
S &= \mathit{Tab}
\end{aligned}
$$

(b) Syntaxdiagramme:






## Aufgabe 7

Gegeben seien die folgenden Prädikate:

$B(x)$: $x$ bellt.
$K(x)$: $x$ ist eine Katze.
$D(x)$: $x$ mag Dosenfutter.
$M(x)$: $x$ miaut.

Drücken Sie die nachfolgenden prädikatenlogischen Formeln als deutsche Sätze aus.

(a) $\exists x\,(K(x) \wedge M(x))$

(b) $\neg\exists x\,(K(x) \wedge B(x))$

(c) $\forall x\,(K(x) \supset (D(x) \vee M(x))$

### Lösung

(a) Manche Katzen miauen. / Es gibt Katzen, die miauen.

(b) Keine Katze bellt. / Es existiert keine Katze, die bellt.

(c) Alle Katzen mögen Dosenfutter oder miauen.

## Aufgabe 8

Gegeben seien die folgenden Aussagen. Drücken Sie diese Aussagen als prädikatenlogische Formeln aus. Bestimmen Sie dabei Ihre Prädikate selbst und geben Sie diese an!

(a) Alle rationalen Zahlen sind reelle Zahlen.

(b) Nicht alle reellen Zahlen sind rationale Zahlen.

(c) Manche reellen Zahlen sind keine rationalen Zahlen.

(d) Jede natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade.

(e) Keine natürliche Zahl ist sowohl gerade als auch ungerade.

### Lösung

Wir benutzen die folgenden Prädikate:

$Q(x)$: $x$ ist eine rationale Zahl.
$R(x)$: $x$ ist eine reelle Zahl.
$N(x)$: $x$ ist eine natürliche Zahl.
$G(x)$: $x$ ist eine gerade Zahl.
$U(x)$: $x$ ist eine ungerade Zahl.

(a) $\forall x\,(Q(x) \supset R(x))$

(b) $\neg\forall x\,(R(x) \supset Q(x))$

(c) $\exists x\,(R(x) \wedge \neg Q(x))$

(d) $\forall x\,(N(x) \supset (G(x) \vee U(x)))$ oder $\forall x\,(N(x) \supset (G(x) \equiv U(x)))$

(e) $\neg\exists x\,(N(x) \wedge G(x) \wedge U(x))$

## Aufgabe 9

Um formale Aussagen über einen bestimmten endlichen Automaten treffen zu können, führen wir das Funktionssymbol $\mathit{start}/0$ und die Prädikatensymbole $\mathit{Ende}/1$ und $\mathit{Übergang}/2$ ein. Wir legen die Bedeutung der Symbole durch folgende Interpretation $I$ über der Menge $\mathcal{U} = \{\, s_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}$ der Zustände fest.

$$\begin{aligned} I(\mathit{start}) &= s_0 \\ I(\mathit{Ende}) &= \{s_1, s_2\} \\ I(\mathit{Übergang}) &= \{(s_0, s_0), (s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_2), (s_2, s_2)\} \end{aligned}$$

Stellen Sie den Automaten graphisch dar. Werten Sie die folgenden Formeln in der gegebenen Interpretation aus.

(a) $\exists y \, \textit{Übergang}(\textit{start}, y)$

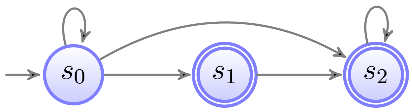
(b) $\neg \textit{Ende}(\textit{start})$

(c) $\forall x \, \exists y \, \textit{Übergang}(x, y)$

Welche Eigenschaften endlicher Automaten drücken diese Formeln aus?

## Lösung

Graphische Darstellung des Automaten:




(a) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(\exists y \, \textit{Übergang}(\textit{start}, y)) = 1$

$\iff$ $\mathsf{val}_{I,\sigma'}(\textit{Übergang}(\textit{start}, y)) = 1$ für mindestens ein $\sigma' \overset{y}{\sim} \sigma$

$\iff$ $(\mathsf{val}_{I,\sigma'}(\textit{start}), \mathsf{val}_{I,\sigma'}(y)) \in I(\textit{Übergang})$ für mindestens ein $\sigma' \overset{y}{\sim} \sigma$

$\iff$ $(s_0, \sigma'(y)) \in \{(s_0, s_0), (s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_2), (s_2, s_2)\}$ für mind. ein $\sigma' \overset{y}{\sim} \sigma$

Wir wählen $\sigma'(y) = s_0$ und erhalten die wahre Aussage
$(s_0, s_0) \in \{(s_0, s_0), (s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_2), (s_2, s_2)\}$

Somit ist die ursprüngliche Formel wahr in der gegebenen Interpretation.

(b) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(\neg \textit{Ende}(\textit{start})) = \mathsf{not}(\mathsf{val}_{I,\sigma}(\textit{Ende}(\textit{start}))) = 1$

$\iff$ $\mathsf{val}_{I,\sigma}(\textit{Ende}(\textit{start})) = 0$

$\iff$ $\mathsf{val}_{I,\sigma}(\textit{start}) \notin I(\textit{Ende})$

$\iff$ $s_0 \notin \{s_1, s_2\}$

Da Letzteres eine wahre Aussage ist, ist die ursprüngliche Formel wahr in der gegebenen Interpretation.

(c) $\mathsf{val}_{I,\sigma}(\forall x \, \exists y \, \textit{Übergang}(x, y)) = 1$

$\iff$ für alle $\sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$ gilt $\mathsf{val}_{I,\sigma'}(\exists y \, \textit{Übergang}(x, y)) = 1$

$\iff$ für alle $\sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$ gibt es ein $\sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma'$,
sodass $\mathsf{val}_{I,\sigma''}(\textit{Übergang}(x, y)) = 1$ gilt.

$\iff$ für alle $\sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$ gibt es ein $\sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma'$,
sodass $(\mathsf{val}_{I,\sigma''}(x), \mathsf{val}_{I,\sigma''}(y)) \in I(\textit{Übergang})$ gilt.

$\iff$ für alle $\sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$ gibt es ein $\sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma'$,
sodass $(\sigma''(x), \sigma''(y)) \in I(\textit{Übergang})$ gilt.

$\iff$ für alle $\sigma' \overset{x}{\sim} \sigma$ gibt es ein $\sigma'' \overset{y}{\sim} \sigma'$,
sodass $(\sigma'(x), \sigma''(y)) \in \{(s_0, s_0), (s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_2), (s_2, s_2)\}$ gilt.

Um die letzte Aussage zu verifizieren, müssen wir für alle möglichen Zustände $\sigma'(x)$ einen Zustand $\sigma''(y)$ finden, sodass ein Übergang existiert:

| $\sigma'(x)$ | $\sigma''(y)$ |
|---|---|
| $s_0$ | $s_0$ |
| $s_1$ | $s_2$ |
| $s_2$ | $s_2$ |
| $s_3$ | ?? |

Da für $s_3$ (bzw. irgendeinen anderen Zustand $s_i$ mit $i > 2$) kein Zustand $\sigma''(y)$ gefunden werden kann, sodass ein Übergang $(s_3, \sigma''(y))$ in $I(\textit{Übergang})$ existiert, gilt die Aussage nicht und die ursprüngliche Formel ist falsch in der gegebenen Interpretation.

Ausgedrückte Eigenschaften:

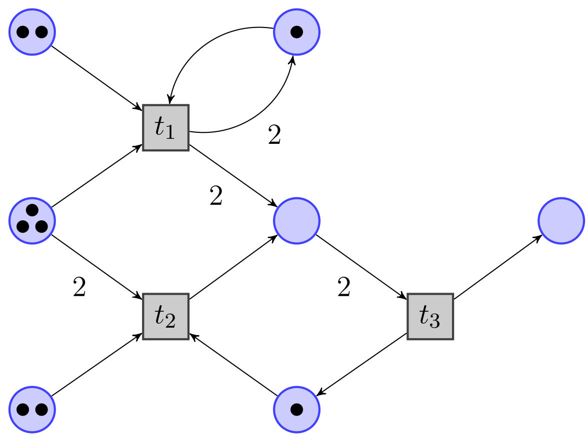
(a) Mindestens ein Zustand ist vom Anfangszustand aus erreichbar.

(b) Der Anfangszustand ist kein Endzustand.

(c) Jeder Zustand besitzt einen Folgezustand.

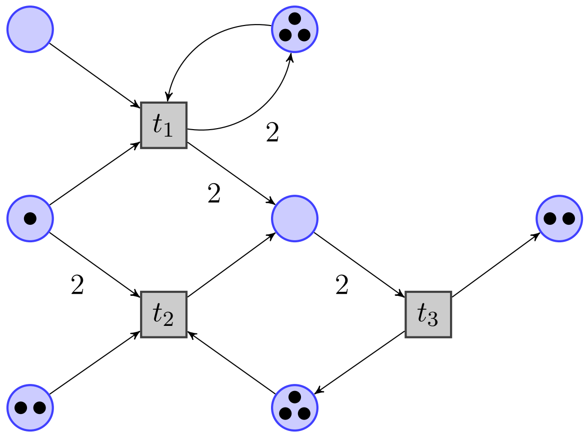
## Aufgabe 10

Gegeben sei das folgende Petri-Netz mit Anfangsmarkierung. Geben Sie alle möglichen Reihenfolgen an, in denen die Transitionen feuern können. Geben Sie jene erreichbaren Markierungen an, in denen keine Transition aktiviert ist.




### Lösung

Die Transitionsfolgen $t_1$–$t_1$–$t_3$–$t_3$ und $t_1$–$t_3$–$t_1$–$t_3$ liefern:




Die Transitionsfolgen $t_1$–$t_2$–$t_3$, $t_1$–$t_3$–$t_2$ und $t_2$–$t_1$–$t_3$ liefern: