Übungsblatt 9 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

57.) Seien $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{C}^N$ gegeben und bezeichnen $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{C}^N$ ihre Spektralwerte, außerdem bezeichne $(x_k)_k$ die N-periodische Fortsetzung des Vektors $\vec{x} \in \mathbb{C}^N$ sowie $w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$. Man zeige dann, daß für die sogenannte "Periodische Faltung" gilt:

$$\vec{y} * \vec{z} := \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y_l z_{k-l} \right)_k \overset{DFT}{\longrightarrow} \left(c_k \cdot d_k \right)_k .$$

58.) Man berechne die Spektralkoeffizienten des N-periodischen diskreten Rechteckimpulses $(x_k)_k$ mit $x_0 = x_{N-1} = 1$ und $x_j = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, N-2$.

59.) Man zeige, daß für die Fouriermatrix F_N:

$$F_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix},$$

mit $w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ gilt:

$$F_N \cdot \overline{F_N} = N \cdot E_N .$$

Dabei bezeichnet $\overline{F_N}$ die konjugierte Matrix und E_N die N-te Einheitsmatrix.
Anmerkung: Das Element in der r-ten Zeile und s-ten Spalte der Matrix $F_N \cdot \overline{F_N}$ berechnet sich durch

$$\sum_{k=0}^{N-1} w^{k(r-1)} \cdot w^{-k(s-1)} .$$

Man unterscheide nun $r = s$ und $r \neq s$.

60.) Man zeige unter Verwendung von Bsp. 59, daß zwischen den Funktionswerten y_j, $j = 0, \ldots, N-1$ und den Spektralkoeffizienten c_k, $k = 0, \ldots, N-1$ folgende Beziehung gilt, die sogenannte Parsevalsche-Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |y_j|^2 .$$

61.) Zur Fourier-Transformation: Man berechne die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

62.) Man berechne die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

63.) Man zeige: Falls $f(t)$ eine gerade Funktion ist, also $f(t) = f(-t)$, dann kann die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ wie folgt berechnet werden:

$$F(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt.$$