1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung

Lara Spendier, Gernot Salzer

16. Oktober 2011

Aufgabe 1 (0.5 Punkte) Gegeben seien die folgenden Aussagen:

A: Es regnet.
B: Das Thermometer zeigt mehr als 30 Grad an.
C: Susi geht in die Vorlesung.
D: Susi geht baden.

Drücken Sie die nachfolgenden Sätze als aussagenlogische Formeln mit Hilfe der Aussagenvariablen A, B, C und D aus.

(a) Wenn das Thermometer mehr als 30 Grad anzeigt, geht Susi baden.

(b) Susi geht in die Vorlesung, wenn das Thermometer mehr als 30 Grad anzeigt und es regnet.

(c) Susi geht nie gleichzeitig baden und in die Vorlesung.

Geben Sie außerdem für jede der drei Formeln die zugehörige Wahrheitstafel an.

Lösung.

(a) $B \supset D$

B	D	$B \supset D$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(b) $(A \wedge B) \supset C$

A	B	C	$(A \wedge B) \supset C$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

(c) $\neg(C \wedge D)$

C	D	$\neg(C \wedge D)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Aufgabe 2 (0.5 Punkte) Gegeben seien die folgenden Aussagen:

A: Der Täter wird ermittelt.
B: Der Täter hinterlässt eine Spur.
C: Sherlock Holmes hat eine geniale Idee.

Formulieren Sie die nachfolgenden aussagenlogischen Formeln als deutsche Sätze.

(a) $(B \vee C) \supset A$

(b) $(\neg B \wedge C) \supset A$

(c) $\neg A \equiv (\neg C \wedge \neg B)$

Geben Sie außerdem für jede der drei Formeln je eine erfüllende und eine widerlegende Variablenbelegung an.

Lösung.

(a) Wenn der Täter eine Spur hinterlässt oder Sherlock Holmes eine geniale Idee hat, wird der Täter ermittelt. *oder* Der Täter wird ermittelt, wenn er eine Spur hinterlässt oder Sherlock Holmes eine geniale Idee hat.

A	B	C	$(B \vee C) \supset A$	e/w
0	0	0	1	e
0	0	1	0	w
0	1	0	0	w
0	1	1	0	w
1	0	0	1	e
1	0	1	1	e
1	1	0	1	e
1	1	1	1	e

e ... erfüllende Interpretation
w ... widerlegende Interpretation

(b) Wenn der Täter keine Spur hinterlässt und Sherlock Holmes eine geniale Idee hat, wird der Täter ermittelt.

A	B	C	$(\neg B \wedge C) \supset A$	e/w
0	0	0	1	e
0	0	1	0	w
0	1	0	1	e
0	1	1	1	e
1	0	0	1	e
1	0	1	1	e
1	1	0	1	e
1	1	1	1	e

e ... erfüllende Interpretation
w ... widerlegende Interpretation

(c) Der Täter wird genau dann nicht ermittelt, wenn er keine Spur hinterlässt und Sherlock Holmes keine geniale Idee hat.

A	B	C	$\neg A \equiv (\neg C \wedge \neg B)$	e/w
0	0	0	1	e
0	0	1	0	w
0	1	0	0	w
0	1	1	0	w
1	0	0	0	w
1	0	1	1	e
1	1	0	1	e
1	1	1	1	e

e ... erfüllende Interpretation
w ... widerlegende Interpretation

Aufgabe 3 (0.5 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass die folgenden Gleichungen gelten.

(a) $A \vee (A \wedge B) = A$ (Absorption)

(b) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (Distributivität)

Lösung.

(a)

A	B	$A \vee (A \wedge B)$	A
0	0	0 **0** 0 0 0	**0**
0	1	0 **0** 0 0 1	**0**
1	0	1 **1** 1 0 0	**1**
1	1	1 **1** 1 1 1	**1**

(b)

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
0	0	0	0 **0** 0 0 0	0 0 0 **0** 0 0 0
0	0	1	0 **0** 0 1 1	0 0 0 **0** 0 0 1
0	1	0	0 **0** 1 1 0	0 0 1 **0** 0 0 0
0	1	1	0 **0** 1 1 1	0 0 1 **0** 0 0 1
1	0	0	1 **0** 0 0 0	1 0 0 **0** 1 0 0
1	0	1	1 **1** 0 1 1	1 0 0 **1** 1 1 1
1	1	0	1 **1** 1 1 0	1 1 1 **1** 1 0 0
1	1	1	1 **1** 1 1 1	1 1 1 **1** 1 1 1

Aufgabe 4 (0.5 Punkte) Welche der folgenden logischen Konsequenzen sind gültig? Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) $A, A \wedge B \models B$

(b) $A \supset B, B \equiv A \models B$

Lösung.

(a)

A	B	$A,$	$A \wedge B$	$\models_I$	B
0	0	0	0	✓	0
0	1	0	0	✓	1
1	0	1	0	✓	0
1	1	1	1	✓	1

Daher: gültig.

(b)

A	B	$A \supset B,$	$B \equiv A$	$\models_I$	B
0	0	1	1	↯	0
0	1	1	0	✓	1
1	0	0	0	✓	0
1	1	1	1	✓	1

Aufgrund von Zeile 1 nicht gültig.

Aufgabe 5 (0.5 Punkte) Geben Sie zu jeder der folgenden Formeln äquivalente Formeln in disjunktiver bzw. konjunktiver Normalform an. Weisen Sie in Ihrer Antwort explizit darauf hin, welche die DNF und welche die KNF ist.

(a) $(A \supset \neg B) \wedge \neg(A \vee \neg C)$

(b) $(A \vee \neg(B \vee \neg C)) \supset (C \wedge \neg B)$

Lösung.

(a) Semantische Methode:

A	B	C	$(A \supset \neg B) \wedge \neg(A \vee \neg C)$	
0	0	0	0	D_{000}
0	0	1	1	K_{001}
0	1	0	0	D_{010}
0	1	1	1	K_{011}
1	0	0	0	D_{100}
1	0	1	0	D_{101}
1	1	0	0	D_{110}
1	1	1	0	D_{111}

DNF: $K_{001} \vee K_{011} = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$

KNF: $D_{000} \wedge D_{010} \wedge D_{100} \wedge D_{101} \wedge D_{110} \wedge D_{111}$
$= (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$
$\wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

Algebraische Methode:

$$\begin{aligned}(A \supset \neg B) \wedge \neg(A \vee \neg C) &= (\neg A \vee \neg B) \wedge \neg(A \vee \neg C)\\ &= (\neg A \vee \neg B) \wedge \neg A \wedge \neg\neg C\\ &= (\neg A \vee \neg B) \wedge \neg A \wedge C\\ &= \neg A \wedge C\end{aligned}$$

Diese Formel ist in KNF und in DNF.

(b) Semantische Methode:

A	B	C	$(A \vee \neg(B \vee \neg C)) \supset (C \wedge \neg B)$	
0	0	0	1	K_{000}
0	0	1	1	K_{001}
0	1	0	1	K_{010}
0	1	1	1	K_{011}
1	0	0	0	D_{100}
1	0	1	1	K_{101}
1	1	0	0	D_{110}
1	1	1	0	D_{111}

DNF: $K_{000} \vee K_{001} \vee K_{010} \vee K_{011} \vee K_{101}$
$= (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$
$\vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$

KNF: $D_{100} \wedge D_{110} \wedge D_{111}$
$= (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

Algebraische Methode:

$$\begin{aligned}&(A \vee \neg(B \vee \neg C)) \supset (C \wedge \neg B)\\ &= \neg(A \vee \neg(B \vee \neg C)) \vee (C \wedge \neg B)\\ &= (\neg A \wedge \neg\neg(B \vee \neg C)) \vee (C \wedge \neg B)\\ &= (\neg A \wedge (B \vee \neg C)) \vee (C \wedge \neg B)\end{aligned}$$

DNF:

$$= (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg B)$$

KNF:

$$
\begin{aligned}
&= (\neg A \vee (C \wedge \neg B)) \wedge (B \vee \neg C \vee (C \wedge \neg B)) \\
&= (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C \vee C) \wedge (B \vee \neg C \vee \neg B) \\
&= (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (B \vee \top) \wedge (B \vee \neg C \vee \neg B) \\
&= (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge \top \wedge (B \vee \neg C \vee \neg B) \\
&= (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C \vee \neg B) \\
&= (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \top) \\
&= (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge \top \\
&= (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 (0.5 Punkte) Daisy Duck kommt sonntags in der Nacht in ein Restaurant und möchte gerne noch etwas essen und trinken. Der Kellner erklärt ihr, dass aufgrund der fortgeschrittenen Stunde nur mehr Schnitzel, Fisch und Nudeln, beziehungsweise Rotwein und Bier serviert werden. Für die Zusammenstellung des Menüs müssen folgende Einschränkungen beachtet werden:

1. Der Kellner serviert niemals Fisch mit Rotwein.
2. Daisy Duck trinkt nie Bier zu einem Gericht, das Nudeln enthält.
3. Weiters kombiniert sie niemals Schnitzel mit Fisch.
4. Sie isst Schnitzel oder Fisch jedoch immer mit einer Beilage. Die Beilage ist dabei eine beliebige andere Speise, die serviert werden kann.

(a) Drücken Sie die beschriebene Situation inklusive der Einschränkungen durch aussagenlogische Formeln aus. Geben Sie dabei zu jeder Elementaraussage an, was sie bedeuten soll. Wählen Sie möglichst atomare[1] Elementaraussagen.

(b) Wird Daisy Duck in diesem Restaurant noch ein passendes Menü serviert? Wenn ja, welche(s)? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Modellierung aus Teil a.

Lösung. Wir benützen die folgenden atomare Elementaraussagen: $S \ldots$ Schnitzel, $F \ldots$ Fisch, $N \ldots$ Nudeln, $R \ldots$ Rotwein und $B \ldots$ Bier.

(a)
0. $F_0 := (S \vee F \vee N) \wedge (B \vee R)$ (Daisy möchte etwas essen und trinken.)
1. $F_1 := \neg(F \wedge R)$ (Nicht gleichzeitig Fisch und Rotwein.)
2. $F_2 := \neg(B \wedge N)$ (Nicht gleichzeitig Bier und Nudeln.)
3. $F_3 := \neg(S \wedge F)$ (Nicht gleichzeitig Schnitzel und Fisch.)
4. $F_4 := (S \vee F) \supset N$ (Wenn Schnitzel oder Fisch, dann Nudeln.)

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen F, S, N, R und B, sodass die Formeln $F_0, \ldots, F_4$ wahr werden.

[1] „atomar“ im Sinn von „nicht weiter unterteilbar“.

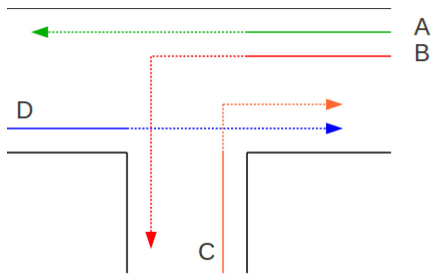
F	S	N	R	B	F_0	$\neg(F \wedge R)$	$\neg(B \wedge N)$	$\neg(S \wedge F)$	$(S \vee F) \supset N$	
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	✓
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	
0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	✓
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	
1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	
1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	
1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	
1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	
1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	

Es ergeben sich daher zwei mögliche Menükombinationen:

$$\neg F, \neg S, N, R, \neg B \models F_0, F_1, F_2, F_3, F_4$$
$$\neg F, S, N, R, \neg B \models F_0, F_1, F_2, F_3, F_4$$

Die möglichen Menüs lauten Nudeln mit Rotwein oder Schnitzel mit Nudeln und Rotwein.

Aufgabe 7 (0.5 Punkte) Die Stadt Wien möchte die folgende Kreuzung analyisieren und bittet deshalb einen Logiker um Hilfe.



(a) Formulieren Sie umgangssprachliche Anforderungen, die sicherstellen, dass die Verkehrsteilnehmer auf den Spuren A, B, C und D nicht zusammenstoßen. Sie brauchen dabei nur zwischen "fährt" und "fährt nicht" zu unterscheiden.

(b) Überführen Sie Ihre umgangssprachliche Anforderungen aus Teil a in eine aussagenlogische Formel. Begründen Sie, warum es in Ihrer Modellierung zu keinem Crash kommt.

Lösung.

(a) Zentrale Erkenntnis: Wenn D fährt, dürfen B und C nicht fahren.
Weitere mögliche Anforderungen:

1. Wenn D fährt, darf B nicht fahren.
2. Wenn D fährt, darf C nicht fahren.
3. Wenn C fährt, darf D nicht fahren.
4. A und D können gleichzeitig fahren.
5. A, B und C können gleichzeitig fahren.
6. ...

(b) Mögliche Lösungen:

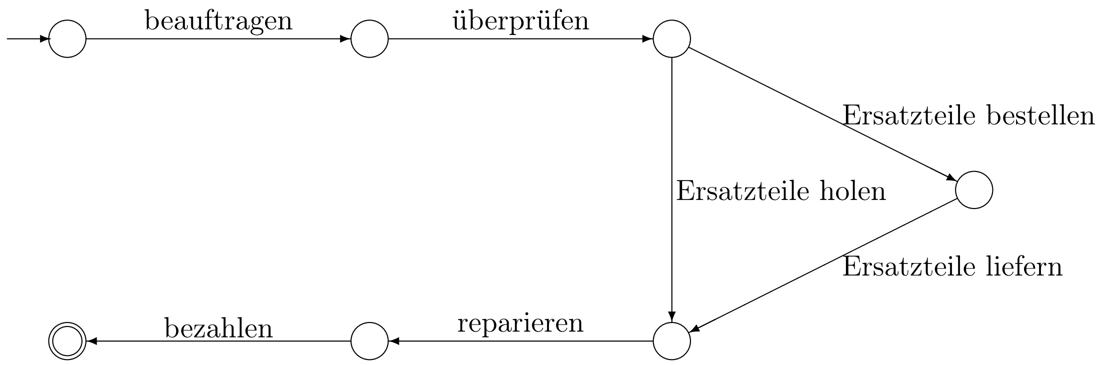
1. $F_1 := D \supset \neg(B \vee C)$ (Wenn D fährt, fahren B und C nicht.)
2. $F_2 := (B \supset \neg D) \wedge (D \supset \neg C)$ (Wenn B fährt, fährt D nicht, und wenn D fährt, fährt C nicht.)
3. ...

Aufgabe 8 (0.5 Punkte) Die Fahrradfirma BikeCompany will die Auftragsabwicklung für Reparaturen optimieren und hält den Ist-Zustand schriftlich fest:

Ein Kunde *beauftragt* eine Reparatur. Zunächst wird das Fahrrad *überprüft*. Danach werden die benötigten *Ersatzteile aus dem Lager geholt* oder, falls sie nicht verfügbar sind, *bestellt* und *geliefert*. Das Fahrrad wird von einem Mitarbeiter der Firma *repariert*. Im letzten Schritt *bezahlt* der Kunde die Reparatur und nimmt das Fahrrad mit.

Entwerfen Sie einen endlichen Automaten, der die Reparatur- Auftragsabwicklung der Firma BikeCompany darstellt.
Hinweis: Signalwörter für (mögliche) Zustandsübergänge sind kursiv geschrieben.

Lösung. Dieses Beispiel ist relativ frei formuliert, der hier angegebene Automat ist *eine* mögliche Lösung!
Graphische Darstellung (ohne Falle):



Tabellarische Darstellung: $\langle Q, \Sigma, \delta, 1, \{7\}\rangle$, wobei

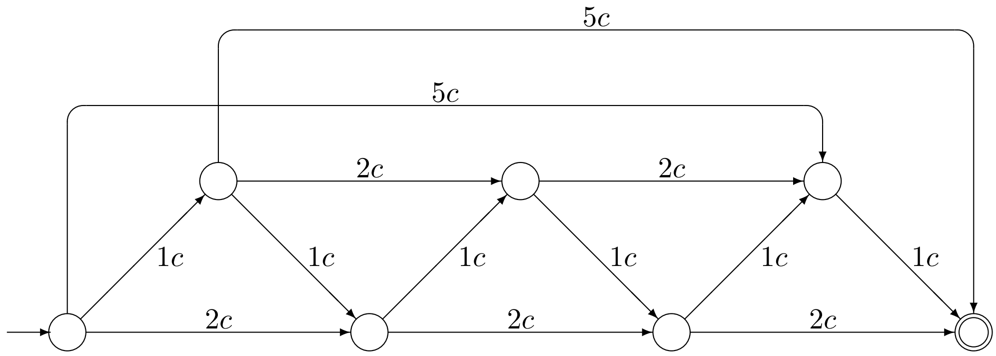
$$Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$\Sigma = \{\text{beauftragen, überprüfen, Ersatzteil holen, } \dots\}$$

und die Übergangsfunktion δ definiert ist durch die Tabelle

	beauftragen	überprüfen	ET bestellen	ET liefern	ET holen	reparieren	bezahlen
1	2	8	8	8	8	8	8
2	8	3	8	8	8	8	8
3	8	8	4	8	5	8	8
4	8	8	8	5	8	8	8
5	8	8	8	8	8	6	8
6	8	8	8	8	8	8	7
7	8	8	8	8	8	8	8
8	8	8	8	8	8	8	8

Aufgabe 9 (0.5 Punkte) Am Institut für Computersprachen steht ein Kaffeeautomat. Eine Tasse Kaffee kostet 6 Cent, allerdings muss der Betrag genau bezahlt werden. Der Kaffeeautomat akzeptiert nur 1-, 2- und 5-Cent-Münzen. Konstruieren Sie einen deterministischen, endlichen Automaten, der den Bezahlvorgang des beschriebenen Kaffeeautomaten darstellt.

Lösung.
Graphische Darstellung (ohne Falle):



Tabellarische Darstellung: $\langle Q, \Sigma, \delta, a, \{g\}\rangle$, wobei

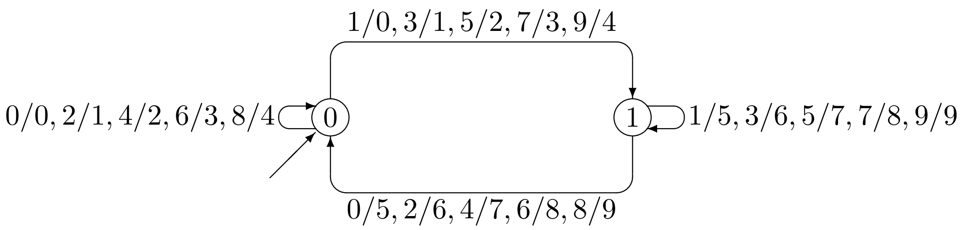
$$Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$
$$\Sigma = \{1c,\ 2c,\ 5c\}$$

und die Übergangsfunktion δ definiert ist durch die Tabelle

	$1c$	$2c$	$5c$
a	b	c	f
b	c	d	g
c	d	e	h
d	e	f	h
e	f	g	h
f	g	h	h
g	h	h	h
h	h	h	h

Aufgabe 10 (0.5 Punkte) Gesucht ist ein Mealy-Automat (bzw. Transducer), der als Eingabe nicht-negative ganze Dezimalzahlen akzeptiert und als Ausgabe eine Dezimalzahl liefert, die der Hälfte der Eingabe entspricht (das Ergebnis wird dabei auf den ganzzahligen Teil abgeschnitten).
Beispiel: Eingabe: 128 — Ausgabe: 064; Eingabe: 233 — Ausgabe: 116
Zeichnen Sie einen solchen Automaten und definieren Sie die Zustände, das Eingabealphabet und die Übergangsfunktion.

Lösung. Der Automat unterscheidet zwei Zustände: 0 (= kein Übertrag bzw. gerade Zahl) und 1 (= Übertrag bzw. ungerade Zahl).
Mealy-Automat in graphischer Darstellung:



Mealy-Automat in tabellarische Darstellung: $\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \gamma, 0\rangle$, wobei

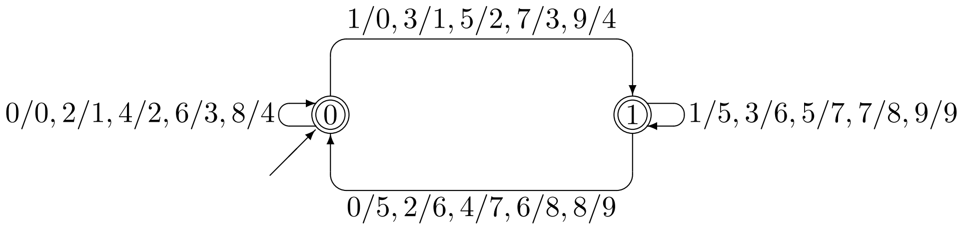
$$
\begin{aligned}
Q &= \{0, 1\} \\
\Sigma &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
\Gamma &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}
\end{aligned}
$$

und die Übergangs- und Ausgabefunktion gegeben sind durch folgende Tabellen:

δ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

γ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9

Transducer in graphischer Darstellung:



Transducer in tabellarische Darstellung: $\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \{0\}, Q\rangle$, wobei

$$
\begin{aligned}
Q &= \{0, 1\} \\
\Sigma &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
\Gamma &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}
\end{aligned}
$$

und die Übergangsrelation gegeben ist durch folgende Tabellen:

δ	ϵ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\{\}$	$\{(0,0)\}$	$\{(0,1)\}$	$\{(1,0)\}$	$\{(1,1)\}$	$\{(2,0)\}$	$\{(2,1)\}$	$\{(3,0)\}$	$\{(3,1)\}$	$\{(4,0)\}$	$\{(4,1)\}$
1	$\{\}$	$\{(5,0)\}$	$\{(5,1)\}$	$\{(6,0)\}$	$\{(6,1)\}$	$\{(7,0)\}$	$\{(7,1)\}$	$\{(8,0)\}$	$\{(8,1)\}$	$\{(9,0)\}$	$\{(9,1)\}$