# Prüfung Algebra und Diskrete Informatik

28.02.2022

**Anmerkung des Erstellers:** Dies ist eine manuell in LateX abgetippte Version der Angabe der Prüfung vom 28.02.2022. Dementsprechend können Fehler oder leichte Abweichungen von der Originalversion auftreten.
An dieser Stelle nehme ich es mir heraus meinen Studydrive-Account zu bewerben: Dort sind Zusammenfassungen der meisten ADM Themengebiete, sowie Lösungen zu diesem Test in fotografierter Form hochgeladen und gratis zum Download verfügbar.
`https://www.studydrive.net/de/profile/earl-charles-grey/2794162?ref=2794162#documents`

(1) [8 Punkte] Man erläutere das Prinzip der vollständigen Induktion an Hand eines Beweises der folgenden Identität, welche für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gezeigt werden soll (wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ für $0 \leq k \leq n$, den Binomialkoeffizienten bezeichne):

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot 2^k}{\binom{k+2}{k}} = \frac{2^{n+1}}{n+2}$$

(2) [8 Punkte = 2· Anzahl korrekter Formeln]
Im folgenden betrachten wir ternäre Wörter endlicher Länge über dem Alphabet $A = \{0, 1, 2\}$, also Wörter $w = x_1x_2...x_n$ mit $x_j \in \{0, 1, 2\}$, für vorgegebenes $n \in N$.

(a) Sei $A_n$ die Anzahl der ternären Wörter der Länge $n$, also $A_n = |\{w = x_1x_2...x_n$, mit $x_j \in A\}|$ Geben sie $A_n$, für allgemeines $n \geq 1$, an. Zur Kontrolle: es gilt $A_1 = 3$, $A_2 = 9$

(b) Sei $B_n$ die Anzahl an ternären Wörtern der Länge $n$, in denen das Symbol 1 genau einmal enthalten ist, für die also gilt: $|\{j : x_j = 1\}|$. Geben sie $B_n$ für allgemeines $n \geq 1$ an.
Zur Kontrolle: es gilt $B_1 = 1, B_2 = 4$.

(c) Sei $C_n$ die Anzahl der ternären Wörter der Länge $n$, in denen je zwei aufeinanderfolgende Symbole verschieden sind (d.h., die keine Teilwörter 00, 11 oder 22 enthalten), für die also gilt: $x_j \neq x_{j+1}$, für $1 \geq j \geq n-1$. Geben sie $C_n$, für allgemeines $n \geq 1$, an.
Zur Kontrolle: es gilt $C_1 = 3, C_2 = 6$
**Hinweis:** Man überlege sich, wie viele Möglichkeiten es für das 1. Symbol $x_1$, dann für das 2. Symbol $x_2$, dann für das 3. Symbol $x_3$, etc. eines solchen Wortes gibt.

(d) Sie $D_n$ die Anzahl der ternären Wörter der Länge $n$, in denen je zwei aufeinanderfolgende Symbole mindestens eien 0 enthalten, für die also gilt: $x_j \cdot x_{j+1} = 0$, für $1 \geq h \geq n-1$. Es lässt sich leicht zeigen, dass $D_n$ die folgende Differenzengleichung erfüllt (das brauchen Sie aber nicht beweisen, das dürfen sie voraussetzten):

$$D_n = D_{n-1} + 2D_{n-2}, \;\; n \geq 2, \;\; D_0 = 1, \;\; D_1 = 3$$

Man löse diese Differenzengleichung und ermittle so eine allgemeine Formel für $D_n, n \in N$. Zur Kontrolle: es gilt $D_2 = 5, D_3 = 11$.

(3) [8 Punkte] Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit folgender Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bezüglich der kanonischen Basis, also $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Ermitteln Sie die Dimension des Kerns von $f$, also den Defekt $\mathrm{def}(f)$, und bestimmen Sie weiters eine Basis $B$ des Kerns von $f$.

(b) Ermitteln Sie den Rang $\mathrm{rg}(f)$ $=\mathrm{rg}(A)$ von $f$, und bestimmen Sie weiters eine Basis $C$ des Bildraums $f(\mathbb{R}^4)$.

(4) [8 Punkte]

(a) Man gebe eine exakte Definition der **Restklasse** $\bar{z}$ einer ganzen Zahl z modulo n $\{n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.

(b) Wie ist der **Restklassenring** $\mathbb{Z}_n$ definiert (Definition der Menge als auch der Rechenoperationen)?

(c) Geben sie für $n = 3$ die **Operationstafeln** für "+" und "$\cdot$" explizit an.

(d) Warum ist für $n \notin \mathbb{P}$, also $n$ nicht prim, der Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ **kein Körper**? (Genaue Argumentation verlangt!)

(5) [8 Punkte] Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zu grundlegenden mathematischen Begriffen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein; für jede vollständige richtige Antwort gibt es einen Punkt: es wurden für falsche Antworten KEINE Punkte abgezogen).

Wie lautet für die komplexe Zahl $z = 1 - i$ der Kehrwert $\frac{1}{z}$ in kartesischer Darstellung?
◯ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ◯ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ◯ $1 - i$ ◯ $1 + i$

Welche der nachfolgend in Polarkoordinaten angegebenen komplexen Zahlen $w$ erfüllen die Gleichung $w^2 = 1$?
◯ $[1, \frac{\pi}{2}]$ ◯ $[1, \pi]$ ◯ $[1, \frac{3\pi}{2}]$ ◯ $[1, 0]$

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind erfüllbar, aber nicht gültig?
◯ $a \Rightarrow (a \vee \neg a)$ ◯ $a \Rightarrow (a \wedge \neg a)$ ◯ $a \wedge \neg a$

Seien $A, B$ Teilmengen eines Universums $E$ und bezeichne $'$ das Komplement bezüglich $E$. Dann gilt: $(A \cap B)'$
◯ $(A \cup B)'$ ◯ $A' \cap B'$ ◯ $A' \cup B$

Wir betrachten die Äquivalenzrelation $Rauf\mathbb{Z}_4$ definiert via $xRy :\Leftrightarrow x^2 = y^2$.
Welche der nachfolgend angegebenen Zerlegungen von $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ beschreibt die der Klasseneinteilung von $R$ entsprechende Partition?
(Syntax der Paritionen nicht originalgetreu)
◯ $|\bar{0}|\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}|$ ◯ $|\bar{0}, \bar{1}|\bar{2}, \bar{3}|$ ◯ $|\bar{0}, \bar{2}|\bar{1}, \bar{3}|$

Eine Halbordnung $P$ auf der Menge $A = \{0, a, b, 1\}$ sei gegeben durch $P = \{(0,0), (1,1), (a,a), (b,b), (0,a), (0,b), (a,1), (b,1), (0,1)\}$. Wie schaut das Hasse-Diagramm von $P$ aus?
(Im Original war das eine Multiple-Choice Aufgabe)

Man betrachte den nachfolgend angegebenen Graphen G $= K_{2,4}$, einen vollständigen bipartiten Graphen mit $2 + 4 = 6$ Knoten.
(Dieser fehlt an dieser Stelle leider.)
Welcher der folgenden Sätze der Graphentheorie sind für diesen anwendbar?
◯ Handschlaglemma
◯ Eulersche Polyederformel
◯ Vierfarbensatz

Wir betrachten wiederum den oben angegebenen Graphen $G = K_{2,4}$.
(Der an dieser Stelle leider immer noch fehlt.)
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
◯ G besitzt eine geschlossene Hamiltonische Linie
◯ G besitzt eine geschlossene Eulersche Linie
◯ G besitzt einen spannenden Baum