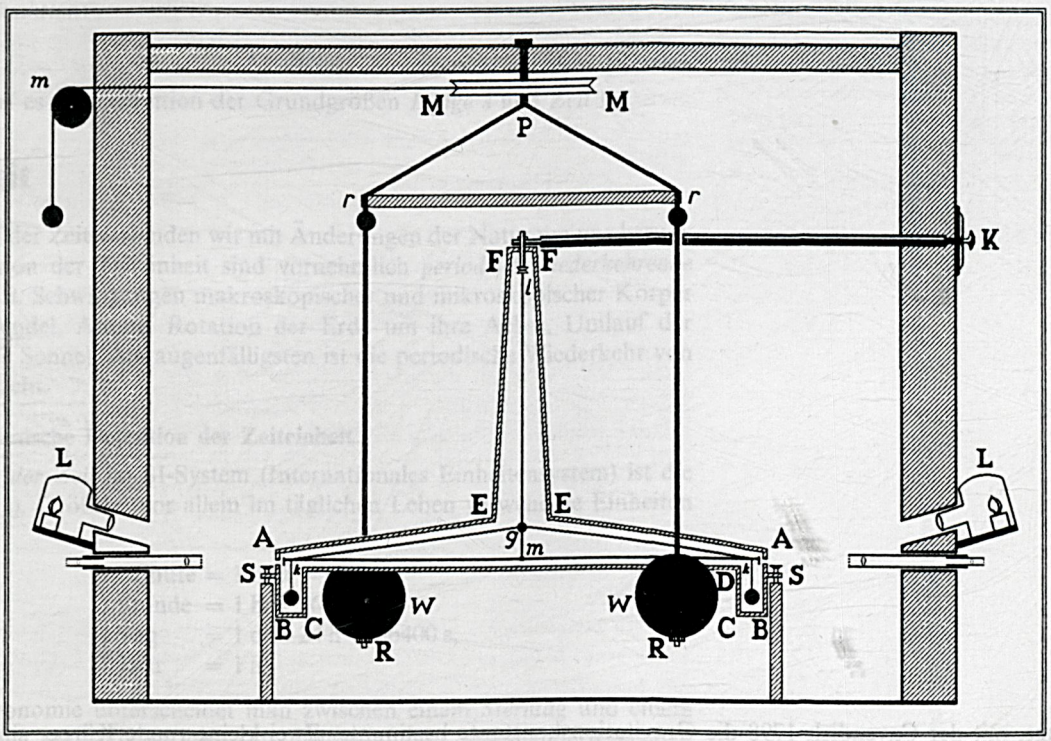
A

Mechanik starrer Körper



Torsionswaage, mit der Cavendish 1798 die Gravitationskonstante bestimmte. Zwei kleine runde Körper sind in einem Gehäuse (A–B–C–D–E–F) an den Enden eines Bügels befestigt, der an einem Torsionsdraht (l–g) hängt. Sie erfahren Anziehungskräfte durch die beiden großen Körper (W), die an einem Bügel (rPr) schwenkbar gelagert sind. Die Drehung der Torsionswaage wird mit Hilfe von Meßfernrohren registriert.
Aus: Phil. Trans. Part I, 526 (1798); siehe auch Kap. 13.1.2; Bibliothek Deutsches Museum, München.

1 Grundbegriffe der Kinematik

In der Kinematik wird die Bewegung von Körpern beschrieben, ohne auf die Ursachen der Bewegungen (Kräfte, Drehmomente, Stöße) und die Eigenschaften der Körper (Masse, Trägheitsmoment, Verformbarkeit) näher einzugehen. Die Beschreibung der Bewegung erfolgt durch Angabe einer *Weg-Zeit-Funktion*:

$$\vec{s} = \vec{s}(t).$$

Dazu bedarf es der Definition der Grundgrößen *Länge* $\vec{s}$ und *Zeit* t.

1.1 Zeit

Den Begriff der Zeit verbinden wir mit Änderungen der Natur um uns herum. Zur Definition der Zeiteinheit sind vornehmlich *periodisch wiederkehrende Vorgänge* z.B. Schwingungen makroskopischer und mikroskopischer Körper geeignet (Pendel, Atome, Rotation der Erde um ihre Achse, Umlauf der Erde um die Sonne). Am augenfälligsten ist die periodische Wiederkehr von Tag und Nacht.

(a) Astronomische Definition der Zeiteinheit

Die *Einheit der Zeit* im SI-System (Internationales Einheitensystem) ist die Sekunde (1 s). Größere, vor allem im täglichen Leben verwendete Einheiten sind:

$$\begin{aligned} 1\ \text{Minute} &= 1\ \text{min} = 60\ \text{s}, \\ 1\ \text{Stunde} &= 1\ \text{h} = 3600\ \text{s}, \\ 1\ \text{Tag} &= 1\ \text{d} = 24\ \text{h} = 86400\ \text{s}, \\ 1\ \text{Jahr} &= 1\ \text{a}. \end{aligned}$$

In der Astronomie unterscheidet man zwischen einem *Sterntag* und einem *Sonnentag*. 1 Sterntag ist die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen eines Sterns durch den Zenit (366,25 Sterntage pro Jahr). 1 Sonnentag ist die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der Sonne durch ihren Kulminationspunkt (365,25 Sonnentage pro Jahr).

Bei der exakten Festlegung der Zeiteinheit hat man die jahreszeitlichen Schwankungen den Erdrotation durch teilweises Schmelzen der Polkappen und die damit verbundene Massenverlagerung sowie die kontinuierliche Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit durch die Gezeitenreibung zu berücksichtigen:

$$1\,\mathrm{s} = (1/86400) \times \text{mittlerer Sonnentag},$$

oder genauer

$$1\,\mathrm{s} = (1/31\,556\,925{,}9747) \times \text{tropisches Jahr 1900}.$$

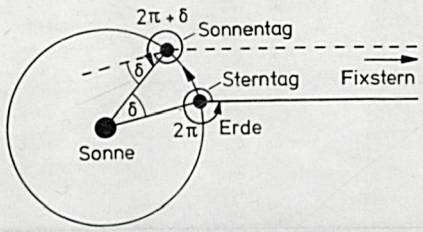


Fig. 1.1: Die unterschiedliche Länge von Stern- und Sonnentag erklärt sich durch den Umlauf der Erde um die Sonne.

Ein *tropisches Jahr*[1] ist ursprünglich die Zeit zwischen zwei Sonnenwenden, heute die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt. Diese Zeiteinheit ist mit astronomischen Mitteln stets exakt reproduzierbar und auf alle früheren oder späteren Jahre umrechenbar. Trotzdem ist man 1967 wegen leichterer Reproduzier- und Anwendbarkeit zu einem mikroskopischen (atomaren) Standard übergegangen.

(b) Mikroskopische Definition der Zeiteinheit

Hierzu verwendet man einen atomaren Übergang, dessen Frequenz bzw. dessen Periodendauer man möglichst genau messen kann. Zeit- und Frequenzmessungen sind einander äquivalent. Betrachten Sie z.B. einen beliebigen periodischen Vorgang (Fig. 1.2). Man definiert:

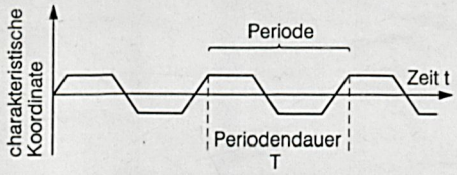


Fig. 1.2: Zeitlicher Verlauf eines periodischen Vorgangs

$$\text{Frequenz} = \frac{\text{Zahl der Perioden}}{\text{Zeitintervall}} = \frac{1}{\text{Periodendauer}}$$

$$\nu = \frac{n}{\Delta t} = \frac{1}{T} \tag{1.1}$$

Einheit: 1 Hertz = 1 Hz = 1/s.

Später wird sehr oft die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ verwendet; sie besitzt die Einheit 1/s. 1967 wurde – selbstverständlich in Übereinstimmung mit der astronomischen Definition festgelegt:

> *Eine Sekunde ist das* 9 192 631 770*-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands des Atoms* ^{133}Cs *entsprechenden Strahlung.*

Anders ausgedrückt: Der Übergang am Cäsiumatom besitzt eine Frequenz von $\nu = 9{,}192\,631\,770$ GHz. In diesem Bereich lassen sich Frequenzvergleiche mit besonders hoher Genauigkeit durchführen. Die Zeiteinheit Sekunde ist damit auf eine Relativgenauigkeit von $2 \cdot 10^{-10}$ festgelegt. Vergleichen Sie damit: Die maximalen Jahresschwankungen der Erdrotation betragen ca. 2 ms, entsprechend einer relativen Schwankung von ca. $2 \cdot 10^{-8}$; die mittlere *Periodenzunahme* der Erdrotation beträgt in 100 Jahren ca. 1,5 ms.

[1] tropos griech. Wende

Tab. 1.1: Zeitmeßinstrumente

Zeitmeßinstrumente	rel. Ganggenauigkeit $\Delta t/t$
Unruh-Uhr, gewöhnliche Pendeluhr	10^{-5}
Quarz-Armbanduhr	10^{-6} (einige s pro a)
Pendeluhr (temperaturstabilisiert)	10^{-8}
Quarzuhr	10^{-10}
Wasserstoff-Atomuhr	10^{-12}
Cs-Atomuhr (kurzzeitig)	10^{-13}–10^{-15}

Die Genauigkeit der Uhren steigt mit der Frequenz des verwendeten periodischen Vorgangs: Kleinere Periodendauer entspricht feinerer Zeiteinteilung. Ein praktisches Instrument zum Frequenzvergleich ist das *Stroboskop*: Es werden mit genau einstellbarer Frequenz Lichtblitze ausgesendet. Periodisch sich bewegende Maschinenteile (Drehscheiben, Schwungräder etc.) scheinen – in dem Blitzlicht betrachtet – still zu stehen, wenn ihre Frequenz mit der eingestellten Frequenz übereinstimmt. Neben periodischen Vorgängen werden – allerdings mit wesentlich geringerer Meßgenauigkeit – auch *Flußvorgänge* (Beispiel: Sanduhr u. ä.) und *quasikontinuierliche Vorgänge* (radioaktive Zerfälle) zur Zeitmessung verwendet. Radioaktive Zerfälle folgen einem exponentiellen Zeitgesetz. Die Zahl N der radioaktiven Kerne einer Probe mit ursprünglich N_0 Kernen nimmt mit einer für den Kern charakteristischen Zeitkonstanten τ ab gemäß

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}. \tag{1.2}$$

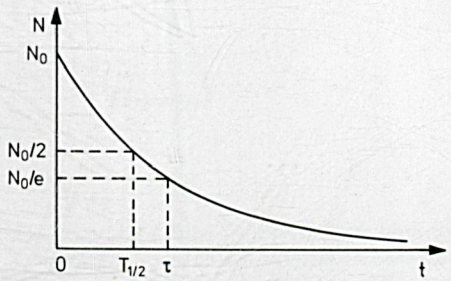


Fig. 1.3: Exponentieller Zerfall einer radioaktiven Substanz. Die charakteristische Zerfallszeit τ ist die Zeit, in der die Zahl der Kerne auf $1/e$ des Anfangswerts abnimmt. Als Halbwertszeit $T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 0{,}693 \cdot \tau$ bezeichnet man die Zeit, nach der die Hälfte der Ausgangssubstanz zerfallen ist.

Beispiele:

(a) Uran-Uhr. ^{238}U zerfällt mit $T_{1/2} = 4{,}5 \cdot 10^9$ a und geht dabei (nach weiteren Zerfällen) letztlich in Blei über. Die Messung des Uran-Blei-Konzentrationsverhältnisses läßt das Alter von Gesteinsproben bestimmen. Hierdurch sind auch Rückschlüsse auf das Erdalter möglich (ca. 10^9 a).

(b) ^{14}C-Altersbestimmung von abgestorbener, einst lebender Materie (Hölzer, Knochen). Durch Einwirkung der Höhenstrahlung bildet sich aus Stickstoff das radioaktive Nuklid ^{14}C; dieses gelangt über die Bildung von CO_2 durch die Photosynthese in die Pflanzen und damit in alle Lebewesen

Tab. 1.2: Beispiele für Zeiten

Erdalter	$1{,}2 \cdot 10^{17}$ s
Alter der Cheopspyramide	$1{,}5 \cdot 10^{11}$ s
Menschenalter	$2 \cdot 10^{7}$ s
1 Jahr	$3{,}1 \cdot 10^{7}$ s
1 Tag	$8{,}6 \cdot 10^{4}$ s
Mittlere Lebensdauer des freien Neutrons	$7 \cdot 10^{2}$ s
Periodendauer des Kammertons a	$2{,}3 \cdot 10^{-3}$ s
Typische Periode einer Molekülrotation	$\approx 1 \cdot 10^{-12}$ s
Periodendauer einer Lichtwelle	$\approx 1 \cdot 10^{-15}$ s
Periodendauer eines 1 MeV-γ-Strahls	$\approx 4 \cdot 10^{-21}$ s

und wird während des Lebens durch den Stoffwechsel in einer Gleichgewichtskonzentration eingebaut. Mit dem Absterben endet der Stoffwechselvorgang; das radioaktive ^{14}C geht durch β-Zerfall mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 5570$ a in ^{14}N über. Die Messung der Restkonzentration (Restaktivität) erlaubt Altersbestimmungen bis ca. $10T_{1/2} \approx 50\,000$ a.

1.2 Länge

Die Einheit der Länge ist das Meter (1 m, Internationale Meterkonvention von 1889). Sie wurde zunächst als der 10-millionste Teil des (ungenau vermessenen) Erdquadranten (Meridian durch Paris) festgelegt und durch einen Standard aus Platin-Iridium-Legierung verkörpert (internationaler Meterprototyp). Die relative Genauigkeit war auf 10^{-6} begrenzt; die Längeneinheit war damit auf 10^{-6} m festgelegt. Gesteigerte Genauigkeitsanforderungen führten 1960 zur Einheitenfestlegung mit Hilfe der Wellenlänge einer „scharfen Spektrallinie":

Ein Meter ist das 1 650 763,73-fache der Wellenlänge der vom Atom des Nuklids ^{86}Kr beim Übergang vom Zustand $5d_5$ zum Zustand $2p_{10}$ ausgesandten, sich im Vakuum ausbreitenden Strahlung.

Oder

$$1\ \text{m} = 1\,650\,763{,}73 \cdot \lambda(^{86}\text{Kr})$$

$$\lambda(^{86}\text{Kr}) = 605{,}780\,225\,10 \cdot 10^{-9}\ \text{m (Kryptonorange).}$$

Apparate, mit denen Längen direkt in Lichtwellenlängen gemessen werden können, heißen Interferometer (siehe Optik). Die relative Genauigkeit dieser Festlegung beträgt etwa 10^{-8}. Mit stabilisierten Lasern (z.B. He-Ne-Lasern) läßt sich diese Genauigkeit auf einige 10^{-9} steigern. Das entspricht einer absoluten Genauigkeit von rund 1 mm auf die Entfernung Berlin–Stuttgart! Trotzdem genügt diese Genauigkeit für heutige meßtechnische Anforderungen nicht. Die wesentlich höheren Genauigkeiten bei der Festlegung und Messung von Zeiten legen nahe, Längen- und Zeit-Standard miteinander zu verknüpfen. Dies geschieht über die Lichtgeschwindigkeit c. Sie ist die am genauesten direkt meßbare Naturkonstante:

$$c = 299\,792\,458 \pm 0{,}6\ \text{m/s} \quad \text{(Terrien 1974)}$$

Man erhält sie – nach $c = \lambda \cdot \nu$ – aus der gleichzeitigen Messung einer Frequenz ν und einer Wellenlänge λ, wobei letztere die relative Gesamt-Meßgenauigkeit von $4 \cdot 10^{-9}$ bestimmt. Die Frequenzmessung ist etwa um den Faktor 10 genauer. Am 20. Oktober 1983 hat die internationale Kommission für Maße und Gewichte daher festgelegt:

Ein Meter ist die Strecke, die das Licht im Vakuum in der Zeit 1/299 792 458 s zurücklegt.

Damit ist die Lichtgeschwindigkeit keine Meßgröße mehr. Sie beträgt exakt

$$\boxed{c \equiv 299\,792\,458 \text{ m/s}.}$$

Die Genauigkeit von Längenmessungen ist damit exakt gleich der von Zeitmessungen.

Künftig könnte man auf die Einheit Meter ganz verzichten und Entfernungen stattdessen in Lichtsekunden (Ls) messen:

$$1 \text{ Ls} \approx 300000 \text{ km},$$
$$1 \text{ nLs (Nanolichtsekunde)} = 29{,}979 \text{ cm} \approx 30 \text{ cm}.$$

Das entspricht recht genau der auch heute noch in den USA üblichen Längeneinheit Fuß: 1 ft = 1 foot = 30,48 cm. Dies demonstriert die immer wieder (vor allem von Amerikanern) proklamierte „Naturgegebenheit"(!) dieser Einheit. Man sollte diese Einheit um ca. 1,5 % korrigieren und in „Neufuß (Nft)" umbenennen:

$$1 \text{ Nft} = 1 \text{ nLs} = 29{,}979 \text{ cm}.$$

Kleinere und größere Längeneinheiten erhält man im SI-System durch die Verwendung von „Vorsätzen":

1 km	$= 10^3$ m	(kilo)
1 cm	$= 10^{-2}$ m	(zenti)
1 mm	$= 10^{-3}$ m	(milli)
1 μm	$= 10^{-6}$ m	(mikro)
1 nm	$= 10^{-9}$ m	(nano)
1 pm	$= 10^{-12}$ m	(pico)
1 fm	$= 10^{-15}$ m	(femto)

In verschiedenen Gebieten der Physik gebräuchliche, nicht metrische Längeneinheiten sind:

1 Ångström	$= 1$ Å $= 10^{-10}$ m	(Atom- und Festkörperphysik)[2]
1 Lichtjahr	$= 1$ Lj $= 9{,}465 \cdot 10^{15}$ m	
1 Parsec	$= 1$ pc $= 3 \cdot 10^{16}$ m	(Astronomie)

1 Lichtjahr ist die Strecke, die das Licht in 1 Jahr zurücklegt:
1 Lj $= 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s $\times$ 365,25 d/a $\times$ 24 h/d $\times$ 3600 s/h $= 9{,}46 \cdot 10^{15}$ m.
1 Parsec (1 pc = 1 Parallaxensekunde) ist die Entfernung, von der aus der Erdbahnhalbmesser unter dem Winkel von 1 Bogensekunde gesehen wird.

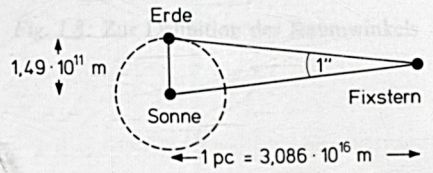


Fig. 1.4: Zur Definition von 1 pc = 1 Parsec

Bei Längenmessungen unterscheidet man zwischen *direkten* (unmittelbarer Vergleich mit Maßstäben) und *indirekten* Methoden (Laufzeitmessungen, trigonometrische Methoden).

[2] Anders Jonas Ångström 1814–1874

Tab. 1.3: Meßinstrumente zur *direkten Längenmessung*

Meßinstument	Genauigkeit
Meterstab („Zollstock")	1 mm
Schieblehre	1/10 mm
Mikrometerschraube, Meßuhr	1/100 mm
Endmaße	1 μm
Meßmikroskope, Interferometer	10 nm

Bei den *indirekten Methoden* führt man die Längenmessung auf Winkel- oder Zeitmessungen zurück.

Trigonometrische Längenmessung:

Mit Hilfe der sehr genau vermessenen Basislänge b und durch Messung der beiden Winkel α und β ergibt sich z.B.

$$a = b \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{1.3}$$

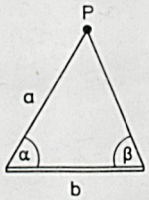


Fig. 1.5: Zur trigonometrischen Längenmessung

Laufzeitmethoden:

Ein Strahlungspuls wird von einem Sender S ausgesendet, vom Objekt P reflektiert und wieder von einem Empfänger E aufgefangen. Seine Laufzeit t wird gemessen, seine Ausbreitungsgeschwindigkeit v muß sehr genau bekannt sein. Die Länge l ergibt sich dann zu

$$l = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t. \tag{1.4}$$

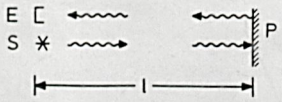


Fig. 1.6: Zur Puls-Laufzeitmethode der Längenmessung

Beispiele:
- Echolot (Schallpuls) $v = 343$ m/s (Luft), $v = 1\,531$ m/s (Seewasser),
- Radar (Radiopuls) $v = 3 \cdot 10^8$ m/s,
- Lidar (Lichtpuls) $v = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Tab. 1.4: Beispiele für Längen

Distanz zu den entferntesten beobachtbaren Galaxien	$\approx 1 \cdot 10^{25}$ m
Entfernung zum Andromeda-Nebel	$2 \cdot 10^{22}$ m
Entfernung zum nächsten Fixstern (α-Centauri)	$4 \cdot 10^{16}$ m
Entfernung Erde–Sonne	$1{,}5 \cdot 10^{11}$ m
Durchmesser der Sonne	$1{,}4 \cdot 10^{9}$ m
Entfernung Erde–Mond	$3{,}8 \cdot 10^{8}$ m
Durchmesser der Erde	$1{,}3 \cdot 10^{7}$ m
Wellenlänge des sichtbaren Lichts	$5 \cdot 10^{-7}$ m
Atomabstände im Kristall	$5 \cdot 10^{-10}$ m
Durchmesser eines Atoms	$3 \cdot 10^{-10}$ m
Durchmesser eines Atomkerns	$3 \cdot 10^{-15}$ m

1.3 Winkel

Winkel werden im Gradmaß, physikalisch jedoch bevorzugt im Bogenmaß angegeben. Beides sind keine echten physikalischen Maßeinheiten, sondern Bruchteile oder Relativwerte.

Ebener Winkel:

1 Grad = 1° = 1/360 des Vollkreises
1° = 60′ (Winkelminuten) = 3600″ (Winkelsekunden).

Winkel im Bogenmaß = Bogenlänge im Einheitskreis

$$\alpha = \frac{b}{r} \tag{1.5}$$

„Einheit":	1 Radiant = 1 rad = 1 m/1 m
Winkel des Vollkreises:	$2\pi \mathrel{\widehat{=}} 360°$
Umrechnung:	$1\ \text{rad} \mathrel{\widehat{=}} 360°/2\pi = 57{,}3°$

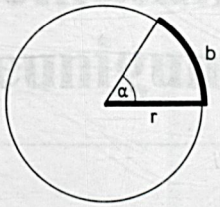


Fig. 1.7: Die Länge des Bogens im Einheitskreis ist ein Maß für den Winkel.

Räumlicher Winkel Ω:

Als Raumwinkel definiert man in Analogie zum ebenen Winkel:

Raumwinkel = Ausschnittsfläche auf der Einheitskugel

$$\text{Raumwinkel} = \frac{\text{Kalottenfläche in m}^2}{\text{Radius}^2 \text{ in m}^2}$$

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \tag{1.6}$$

„Einheit":	1 Steradiant = 1 sterad = 1 sr
Gesamtraumwinkel:	$4\pi r^2/r^2 = 4\pi$

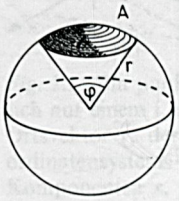


Fig. 1.8: Zur Definition des Raumwinkels

Der Raumwinkel Ω ist nicht zu verwechseln mit dem Öffnungswinkel φ des zugehörigen Kreiskegels. Es gilt die Umrechnung:

$$\Omega = 2\pi \cdot \left[1 - \cos(\varphi/2)\right]; \qquad \text{1 sterad entspricht } \varphi = 65{,}54°.$$