Prüfungsbeispiel 08

1a) Eine stündlich gemittelte Lautstärkenmessung in einer Wiener Wohnung ergab folgende Abweichungen (in dB) vom zumutbaren Durchschnittswert 60 dB:

	Abweichung Wiener Wohnung x-Werte	Abweichung Nachbarwohnung y-Werte	sortierte Abweichungen Wiener Wohnung
1	-15	-23	-18
2	-18	-25	-17
3	-13	-27	-15
4	-17	-30	-13
5	-12	-23	-12
6	1	-13	-1
7	10	2	1
8	22	11	6
9	21	13	10
10	18	5	14
11	15	2	15
12	21	7	15
13	25	9	16
14	16	3	17
15	14	-2	18
16	18	0	18
17	19	9	19
18	26	12	19
19	28	13	21
20	17	5	21
21	19	1	22
22	15	-5	25
23	6	-10	26
24	-1	-18	28

Es kann angenommen werden, dass die Daten normalverteilt sind!

a) Wird der zumutbare Wert im Tagesschnitt überschritten? (Signifikanzniveau 0.05)

Vorbereitungen:

$$\sum x_i = 235$$

$$\sum x_i^2 = 7301$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{24} = 9{,}792$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}{n-1}} = 14{,}744$$

Da σ unbekannt ist, müssen wir einen t-Test duchführen.

$H_0: \mu \leq \mu_0$
$H_1: \mu > \mu_0$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{9{,}792 - 0}{14{,}744} \cdot \sqrt{24}$$
$$\underline{\underline{t = 3{,}25}}$$

Kritischer Wert $t_{23;0{,}95} = 1{,}714$

$t \geq t_{n-1;1-\alpha} \Rightarrow$ Kritischer Wert wird überschritten.

Die Hypothese $H_0: \mu \leq \mu_0$ wird verworfen. Der zumutbare Wert im Tagesschnitt wird überschritten.

b) Geben Sie eine robuste Schätzung (d.h. eine Schätzung, die weniger empfindlich gegenüber Ausreißer ist) für das Mittel und für die Streuung der Abweichungswerte an.

Median: $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x_{(12)} + x_{(13)}) = \frac{1}{2}(15 + 16) = \underline{\underline{15.5}}$

$$n \cdot \alpha = \{ganzzahlig \Rightarrow q_\alpha = \frac{x_{n\alpha} + x_{n\alpha+1}}{2}$$
$$q_{0.25} = \frac{x_{(6)} + x_{(7)}}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$
$$q_{0.75} = \frac{x_{(18)} + x_{(19)}}{2} = \frac{19+21}{2} = 20$$
$$s = \frac{q_{0.75} - q_{0.25}}{1{,}349} = \frac{20-0}{1{,}349} = \underline{\underline{14{,}82}}$$

c) Eine Messung in einer Nachbarwohnung im selben Zeitraum ergab die Werte:

Testen Sie, ob die Werte in beiden Wohnungen miteinander korreliert sind?
(Annahme bivariate Normalverteilung: Signifikanzniveau 5%)

$$\sum y_i = -84$$
$$\sum y_i^2 = 4816$$
$$\overline{y} = -3{,}5$$
$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum y_i^2 - n \cdot \overline{y}^2\right) = \frac{1}{23}\left(4816 - 24 \cdot (-3{,}5)^2\right) = 196{,}608$$
$$\underline{\underline{s_y = 14{,}022}}$$

Skriptum Seite 107 - 108

$$r_{xy} = \frac{1}{s_x \cdot s_y} \cdot \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) =$$
$$r_{xy} = \frac{1}{s_x \cdot s_y} \cdot \frac{1}{n-1} \left(\sum x_i y_i - n\overline{xy}\right) =$$
$$r_{xy} = \frac{1}{14{,}744 \cdot 14{,}022} \cdot \frac{1}{23}\left(3800 - 24 \cdot 9{,}792 \cdot (-3{,}5)\right) = \underline{\underline{0{,}972}}$$

$$R = r_{xy}$$
$$T = R \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-R^2}} = 0.972 \cdot \sqrt{\frac{22}{1-0{,}972^2}} = 19{,}40$$

$H_0 : \rho = 0$ (keine Korrelation)

Entscheidung gegen H_0, falls $|T| > t_{n-2;1-\alpha/2}$ Skriptum Seite 131

$t_{n-2;1-\alpha/2} = t_{22;1-0.025} = \underline{\underline{2{,}074}}$ 19,40 > 2,074 daher Entscheidung gegen H_0

Zwischen den beiden Wonungen besteht ein linearer Zusammenhang.

d) Unter der zusätzlichen Annahme gleicher Varianzen teste man, ob die Mittel der Abweichungswerte in den beiden Wohnungen gleich sind. (Signifikanzniveau 5%)

Skriptum Seite 88:

$$T = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{24 \cdot 24 \cdot 46}{48}} \cdot \frac{9{,}79 + 3{,}5}{\sqrt{23 \cdot 217{,}389 + 23 \cdot 196{,}608}} = \sqrt{552} \cdot \frac{13{,}29}{97{,}58} = \underline{\underline{3{,}199}}$$

$H_0 : \mu_x = \mu_y$ $\quad$ $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$ $\quad$ Skriptum Seite 130

$t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{46;1-0{,}025} = \underline{\underline{2{,}014}}$ $\quad$ Skriptum Seite 118

Entscheidung gegen H_0, falls $|T| > t$.

$H_0 : \mu_x = \mu_y$ wird abgelehnt