# Beispiel 170 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 12, 29.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 06/2006

## 1 Angabe

Nach welcher Zeit $t$ (in Stunden) erreichen die Betriebskosten

$$B(t) = 10.45t + 0.0016t^2 + 17200(1 - e^{-0.0002t})$$

eines Netzwerkrouters den Anschaffungspreis $A = 100.000$ EUR? Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

## 2 Theorie; `Newton`'sches Näherungsverfahren

- Vorbedingung: $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar, $f'(x) \neq 0$
- Ausgangspunkt: $f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(x) = x - f(x) \cdot \frac{1}{f'(x)}$ - ergibt die Hauptformel

$$\mathbf{x_{n+1} = x_n \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Wenn Startwert $x_0$ nahe genug an $x^*$ liegt ist Konvergenz gesichert
- **Konvergenzgeschwindigkeit** - Konvergenzordnung $p \geq 1$ definiert durch:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M \cdot |x_n - x^*|^p$$

  (für fast alle $n$ und ein passendes $M > 0$); `Newton`-Verfahren hat bei einfachen Nullstellen quadratische Konvergenz ($p = 2$)

## 3 Lösung des Beispiels

Wir haben das Beispiel in folgenden Schritten zu lösen:

1. Bildung der Funktion $f(t) = B(t) - A$
2. Untersuchung des Monotonieverhaltens von $f(t)$
3. Gesuchte Nullstelle mit Hilfe des `Newton`-Verfahrens bestimmen
4. Ergebnis auf Eindeutigkeit hin diskutieren

## 3.1 Bildung der Funktion $f(t) = B(t) - A$

Die Funktion $f(t)$ ist eine Verschiebung der Funktion $B(t)$ um $-100000$ entlang der $y$-Achse - die Nullstelle dieser Funktion ist dann die Lösung:

$$f(t) = 10.45 \cdot t + 0.0016 \cdot t^2 + 17200 \cdot (1 - e^{-0.0002 \cdot t}) - 100000$$

## 3.2 Untersuchung des Monotonieverhaltens von $f(t)$

Um die Monotonieeigenschafteb von $f(t)$ untersuchen zu können, benötigen wir $f'(t)$:

$$f(t) = 10.45 \cdot t + 0.0016 \cdot t^2 + 17200 \cdot (1 - e^{-0.0002 \cdot t}) - 100000$$
$$f(t) = 10.45 \cdot t + 0.0016 \cdot t^2 - 17200 \cdot e^{-0.0002 \cdot}) - 82800$$
$$f'(t) = 10.45 + 0.0032 \cdot t + 3.44 \cdot e^{-0.0002 \cdot t}$$

Betrachten wir die einzelnen Summanden, so uns klar, dass die Funktion immer monoton wächst.

## 3.3 Gesuchte Nullstelle mit Hilfe des `Newton`-Verfahrens bestimmen

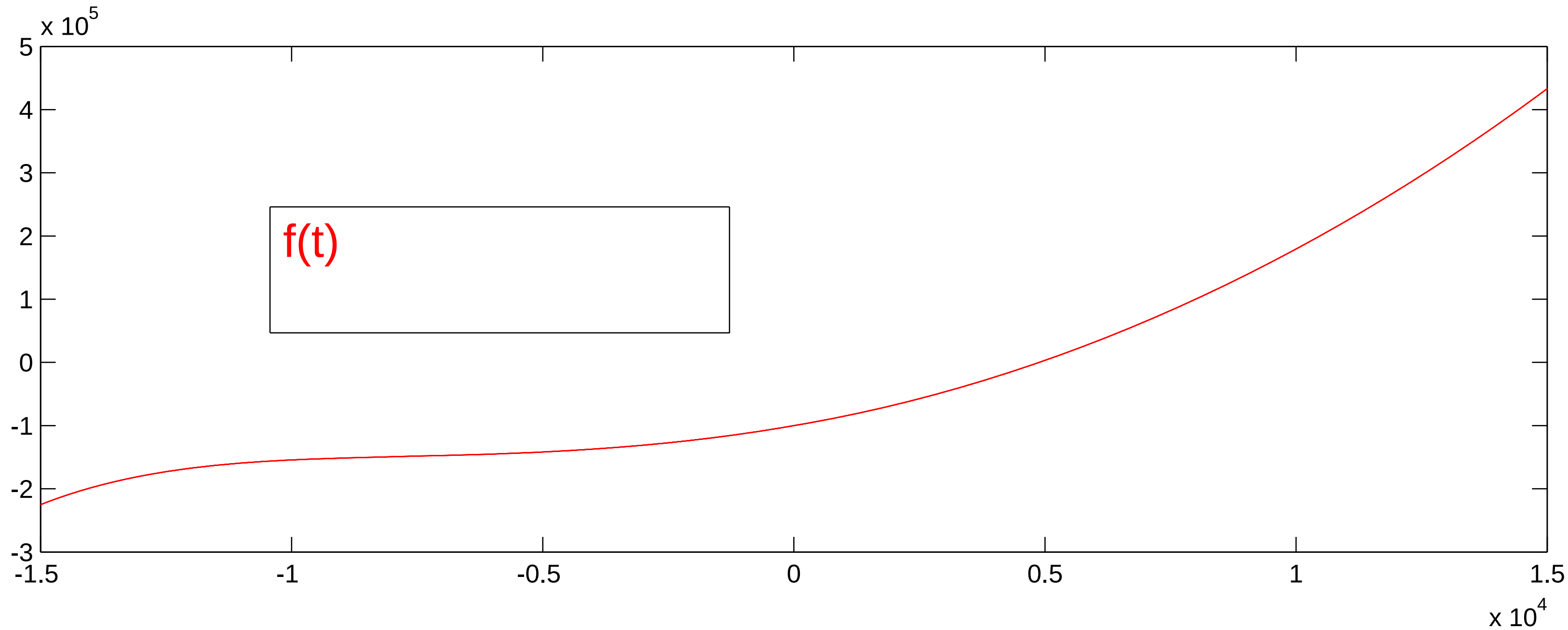
$f(x)$ ist weimal differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ - daher gilt:

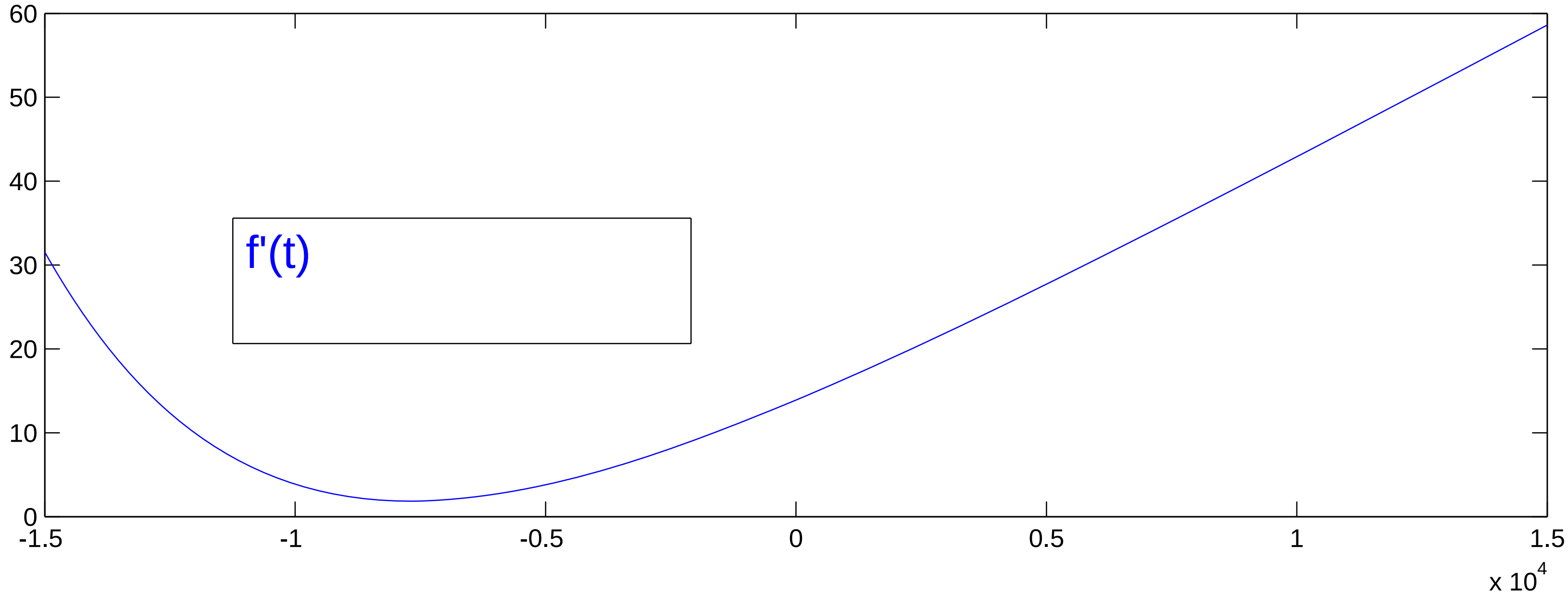
$$t_{n+1} = t - \frac{10.45 t_n + 0.0016 t_n^2 - 17200 \cdot e^{-0.0002 \cdot t} - 82800}{10.45 + 0.0032 \cdot t + 3.44 \cdot e^{-0.0002 \cdot t}}$$

Als Startwert wählen wir $t_0 = 2000$.
Der MATLAB-Code ist im Anhang und liefert nach 4 Iterationen die Nullstelle bei 4886.55.

```
format long;
t=2000;
t_0=2000;
for i=1:10
    f=10.45*t+0.0016*t.^2 - 17200*exp(-0.0002*t) - 82800;
    f_i=10.45+0.0032*t+3.44*exp(-0.0002*t);
    t_0=t;
    t=f/f_i;
    t=t_0-t;
    fprintf('Iteration %d: %d \r\n',i,t)
end
```

```
Iteration 1: 5.499157e+003

Iteration 2: 4.905684e+003

Iteration 3: 4.886675e+003

Iteration 4: 4.886656e+003

Iteration 5: 4.886656e+003

Iteration 6: 4.886656e+003

Iteration 7: 4.886656e+003

Iteration 8: 4.886656e+003

Iteration 9: 4.886656e+003

Iteration 10: 4.886656e+003
```


x 10^5
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
f(t)
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
x 10^4


60
50
40
30
20
10
0
f'(t)
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
x 10^4