Theoretische Informatik
Übungsblatt 3 (2023W)
Lösungsvorschlag

Allgemeine Hinweise:

- Die Deadline für die Abgabe der Lösungen zum Übungsblatt 3 ist der **13. Dezember 2023**.
- Wiederholung von der Vorbesprechung: Eine Abgabe besteht aus *einer* PDF-Datei. Punkte gibt es für jeden ernsthaften Lösungsversuch, auch wenn die Lösung falsch ist. Nur abgeschriebene Lösungen werden mit 0 Punkten bewertet. Die Verwendung von Latex wird nachdrücklich empfohlen (ein Latex template wurde auf TUWEL bereitgetstellt). Handschriftliche Lösungen sind okay, solange sie *gut* lesbar sind.
- Das Übungsblatt 3 enthält zuerst 4 Fragen mit max. 10 Punkten und danch 4 Fragen zu max. 15 Punkten, sodass auf das Übungsblatt 3 max. 100 Punkte erzielt werden können. Gemeinsam mit den anderen Übungsblättern werden insgesamt max. 400 Punkte erreichbar sein. Das Gesamtergebnis für den Übungsteil der VU wird dann durch Division mit 10 und Aufrunden berechnet (also max. 40 Punkte auf den Übungsteil). Auf diese Weise werden Bruchteile von Punkten sowie mehrmaliges Runden vermieden.

Aufgabe 3.1
(Ergänzung Beweis der Korrektheit der Reduktion von **3-FÄRBBARKEIT** auf **SAT**).
Betrachten Sie für beliebiges $n \geq 0$ die aussagenlogischen Formeln

$$\phi_1 = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (a_i^r \vee a_i^g \vee a_i^b),$$

$$\phi_2 = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \big(\neg(a_i^r \wedge a_i^g) \wedge \neg(a_i^r \wedge a_i^b) \wedge \neg(a_i^g \wedge a_i^b)\big),$$

Beweisen Sie folgende Aussage: Für jede Wahrheitswertbelegung I für $\phi_1 \wedge \phi_2$ mit $I(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mathbf{true}$ gilt: für alle i mit $1 \leq i \leq n$ hat genau ein Atom aus $\{a_i^r, a_i^g, a_i^b\}$ unter I den Wahrheitswert **true**.
(10 Punkte)

Lösung 3.1
Indirekt. Angenommen es gibt ein i wo das nicht der Fall ist. Wir können das in 2 Fälle gliedern. (1) Kein Atom aus $\{a_i^r, a_i^g, a_i^b\}$ ist wahr unter I, also $I(a_i^r) = I(a_i^g) = I(a_i^b) = \mathbf{false}$. (2) Zwei oder mehr Atome aus $\{a_i^r, a_i^g, a_i^b\}$ sind wahr unter I.

- Fall (1): Klarerweise ist dann die i-te Klausel in ϕ_1 (also $(a_i^r \vee a_i^g \vee a_i^b)$ falsch unter I.
- Fall (2): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen hier wir an, dass $I(a_i^r) = I(a_i^g) = \mathbf{true}$. Es folgt dass $(a_i^r \wedge a_i^g)$ wahr unter I und daher $\neg(a_i^r \wedge a_i^g)$ falsch unter I. Klarerweise ist dann das i-te Konjunkt in ϕ_2 ebenfalls falsch unter I.

In beiden Fällen haben wir also ein Konjunkt in $\phi_1 \wedge \phi_2$ das falsch unter I ist. Es folgt dass $\phi_1 \wedge \phi_2$ falsch unter I. Widerspruch zur Annahme $I(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mathbf{true}$!

Aufgabe 3.2
(Abwandlung der Reduktion von **3-FÄRBBARKEIT** auf **SAT**).
Wir betrachten die Reduktion von **3-FÄRBBARKEIT** auf **SAT** (siehe Folie 3.18) jedoch **ohne** Teilformel ϕ_2. In anderen Worten, wir definieren unsere Reduktion $R(\cdot)$, sodass für jeden Graph G, $R(G) = \phi'_G = \phi_1 \wedge \phi_3$.

Zeigen Sie nun dass auch hier folgende Äquivalenz gilt:

$G = (V, E)$ ist eine positive Instanz von **3-FÄRBBARKEIT** $\Leftrightarrow$ ϕ'_G ist eine positive Instanz von **SAT**.

a) Argumentieren Sie anhand des Beweises in Teil 3.1 warum die $\Rightarrow$-Richtung klarerweise auch für ϕ'_G gelten muss.

b) Beweisen Sie die $\Leftarrow$-Richtung. Hinweis: Beachten Sie dass wenn $I(\phi_3) = \textbf{true}$, dann ist auch $I'(\phi_3) = \textbf{true}$ für jede "kleinere" Wahrheitswertbelegung I', also für alle I' die zumindest jene Atome auf falsch setzen, die auch unter I falsch sind.

(10 Punkte)

Lösung 3.2

(a) Klarerweise gilt für jede Belegung I mit $I(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) = \textbf{true}$ auch $I(\phi_1 \wedge \phi_3) = \textbf{true}$. Damit ist die $\Rightarrow$-Richtung durch den Beweis in Teil 3.1 bereits abgedeckt.

(b) Angenommen $I(\phi_1 \wedge \phi_3) = \textbf{true}$. Es folgt, dass für jedes i mindestens eines der Atome $\{a_i^r, a_i^g, a_i^b\}$ in I auf wahr gesetzt wird. Wir konstruieren nun ein I' aus I wobei wir Atome a_i^r, a_i^g, a_i^b von wahr auf falsch ändern, sodass in I', für jedes i *genau* eines der Atome $\{a_i^r, a_i^g, a_i^b\}$ auf wahr gesetzt ist. Es gilt also für I' dass jedes Atom das in I auf falsch gesetzt ist auch in I' auf falsch gesetzt ist. Wir zeigen nun dass aus $I(\phi_1 \wedge \phi_3) = \textbf{true}$ auch $I'(\phi_G) = \textbf{true}$ folgt. Für $\phi_1 \wedge \phi_2$ gilt nun für I' dieselbe Argumentation wie auf den Folien ($\Rightarrow$-Richtung). Für ϕ_3 beobachten wir, dass wenn $I(\phi_3) = \textbf{true}$ und wir ein beliebiges Atom von wahr auf falsch ändern die Formel weiter wahr unter dieser geänderten Wahrheitswertbelegung bleibt (da ϕ_3 ausschliesslich aus negierten Konjunktionen von positiven Literalen besteht). Es folgt dass $I'(\phi_G) = \textbf{true}$ und wir können nun direkt die $\Leftarrow$-Richtung des Beweises auf den Folien nutzen.

Aufgabe 3.3

(Transitivität von Reduktionen).

Wir haben drei Entscheidungsprobleme gegeben: P_1, P_2 und P_3. Wir wissen, dass $P_1 \in \textbf{NP}$ und dass P_3 **NP**-hart ist. Welche zusätzlichen Aussagen über P_1, P_2, und P_3 können wir bzgl. **NP** treffen wenn folgende polynomielle many-one Reduktionen gelten:

a) $P_1 \leq_R P_2$ und $P_2 \leq_R P_3$

b) $P_2 \leq_R P_1$ und $P_2 \leq_R P_3$

c) $P_2 \leq_R P_1$ und $P_3 \leq_R P_2$

d) $P_1 \leq_R P_2$, $P_2 \leq_R P_3$ und $P_3 \leq_R P_1$

(10 Punkte)

Lösung 3.3

a) keine

b) $P_2 \in \textbf{NP}$

c) P_1, P_2, P_3 sind **NP**-vollständig.

d) P_1, P_2, P_3 sind **NP**-vollständig.

Aufgabe 3.4

(Formalisieren von Reduktionen).

Formalisieren Sie folgende Many-One Reduktionen zwischen Graph-Problemen aus Teil 3.3 der Vorlesung:

a) **CLIQUE** $\leq_R$ **INDEPENDENT SET**

b) **INDEPENDENT SET** $\leq_R$ **VERTEX COVER**

c) **VERTEX COVER** $\leq_R$ **CLIQUE**

Beachten Sie dass für alle genannten Probleme die Instanzen der Gestalt (G, k) sind.

(10 Punkte)

Lösung 3.4
Für einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ sei im folgenden $|G| = |V|$ und $\overline{G} = (V, (V \times V) \setminus (E \cup \{[v, v] \mid v \in V\}))$.

a) Wir konstruieren R_1 sodass $R_1((G, k)) = (\overline{G}, k)$.

b) Wir konstruieren R_2 sodass $R_2((G, k)) = (G, |G| - k)$.

c) Wir konstruieren R_3 sodass $R_3((G, k)) = (\overline{G}, |G| - k)$.

Aufgabe 3.5
(NP-Vollständigkeit).
Ein ungerichteter Graph heißt *non-2-degree Graph* wenn keiner seiner Knoten exakt zwei Kanten zu anderen Knoten hat.
Beispiele:

- Graph $(\{a, b, c, d\}, \{[a, b], [b, c], [b, d]\})$ ist ein non-2-degree Graph
- Graph $(\{a, b, c, d\}, \{[a, b], [b, c], [c, d]\})$ ist kein non-2-degree Graph
- Graph $(\{a, b, c\}, \{[a, b], [b, c], [a, c]\})$ ist kein non-2-degree Graph

Wir betrachten das folgende Entscheidungsproblem (Einschränkung des **3-FÄRBBARKEIT**-Problems auf non-2-degree Graphs):

3-FÄRBBARKEIT-N2D (3COL-N2D)

INSTANZ: Ein non-2-degree Graph $G = (V, E)$.

FRAGE: Gibt es eine a Funktion f von den Knoten V zu Werten $\{0, 1, 2\}$ sodass $f(v_1) \neq t(v_2)$ für jede Kante $[v_1, v_2] \in E$.

Zeigen Sie dass **3COL-N2D** NP-vollständig ist. Nutzen Sie in Ihrem Beweis die Tatsache dass **3-FÄRBBARKEIT NP**-vollständig ist.

Hinweis: Für **NP**-membership reicht ein einfaches Argument; **NP**-Härte ist über eine Reduktion von **3-FÄRBBARKEIT** zu zeigen.
(15 Punkte)

Lösung 3.5
Zur Erinnerung: **3-COLORABILITY** ist wie folgt definiert.

3-COLORABILITY (3COL)

INSTANZ: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

FRAGE: Existiert eine Funktion f von V nach $\{0, 1, 2\}$ sodass $f(v_1) \neq f(v_2)$ für alle Kanten $[v_1, v_2] \in E$.

Um NP-Vollständigkeit **3COL-N2D** zu zeigen müssen wir NP-Membership und NP-Härte für das Problem argumentieren.

NP-Membership: **3COL-N2D** ist in NP, da es ein Spezialfall von **3COL** ist, welches wiederum in **NP** ist.

NP-Härte: Wir nutzen folgende polynomielle Reduktion von **3COL** auf **3COL-N2D**. Sei $G = (V, E)$ eine Instanz von **3COL** wobei $U \subseteq V$ jene Knoten sind die Grad 2 in G haben. Wir konstruieren Instanz $G' = (V \cup U', E')$ von **3COL-N2D** mit $U' = \{u' \mid u \in U\}$ und $E' = E \cup \{[u, u'] \mid u \in U\}$. Laut Definition ist jeder solche Graph G' ein non-2-degree Graph; die Reduktion liefert also die geforderten Objekte, also Instanzen von **3COL-N2D**.

Wir zeigen nun die Korrektheit der Reduktion, also

$$G \text{ ist eine positive Instanz von } \textbf{3COL} \iff G' \text{ ist eine positive Instanz von } \textbf{3COL-N2D}$$

$\Rightarrow$: Sei G eine positive Instanz von **3COL**. Dann gibt es eine Funktion f von V nach in $\{0, 1, 2\}$ sodass $f(v_1) \neq f(v_2)$ für alle Kanten $[v_1, v_2] \in E$. Wir konstruieren eine Färbung für G' mittels $f^* : V \cup U' \to \{0, 1, 2\}$ wie folgt: für alle $v \in V$, $f^*(v) = f(v)$ und für alle $u \in U$: $f^*(u') = (f(u) + 1)\ mod\ 3$.

Wir müssen noch zeigen dass f^* eine gültige Drei-Färbung für G' ist, d.h. für alle $[x, y] \in E'$, $f^*(x) \neq f^*(y)$. Wir unterscheiden zwei Fälle (1) $x, y \in V$: laut Konstruktion und Annahme dass f gültige Drei-Färbung für G ist, gilt $f^*(x) \neq f^*(y)$; (2) $x \in U$ und $y = x'$: laut Definition von f^*, haben wir auch hier $f^*(x) \neq f^*(y)$. G' ist daher drei-färbbar und daher eine positive Instanz von **3COL-N2D**.

$\Leftarrow$: Sei G' eine positive Instanz von **3COL-N2D**. Dann ist G' dreifärbbar und da G ein Subgraph von G' ist, ist auch G dreifärbbar. Daher ist G eine positive Instanz von **3COL**.

Aufgabe 3.6
(Reduktion und Diskussion von Implikationen).

a) Geben sie eine polynomielle many-one Reduktion von **2-FÄRBBARKEIT** nach **3-FÄRBBARKEIT** an und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktion.

b) Gegeben diese Reduktion und die Tatsache dass **3-FÄRBBARKEIT** NP-vollständig ist, was kann von a) über die Komplexität von **2-FÄRBBARKEIT** geschlossen werden?

c) Wenn wir auch eine polynomielle many-one Reduktion von **3-FÄRBBARKEIT** auf **2-FÄRBBARKEIT** angeben könnten, was wäre die Konsequenz (nutzen Sie hier auch Ihr Wissen über **2-FÄRBBARKEIT** aus Teil 1 der LVA)?

(15 Punkte)

Lösung 3.6

a) Gegeben eine Instanz $G = (V, E)$ von **2COL**. Wir konstruieren Graph $G' = (V', E')$ mit
   - $V' = V \cup \{x\}$ wobei x ein neuer Knoten und
   - $E' = E \cup \{[v, x] \mid v \in V\}$.

   Wir zeigen: G ist eine positive Instanz von **2COL** $\Leftrightarrow$ G' is eine positive Instanz von **3COL**.
   - $\Rightarrow$: Angenommen G kann mittels 2 Farben gefärbt werden. Dieses Coloring kann einfach auf G' erweitert werden indem man den Knoten x mit der zusätzlich vorhandenen dritten Farbe färbt.
   - $\Leftarrow$: Angenommen G' kann mittels 3 Farben gefärbt werden. Da der Knoten x mit allen Knoten des ursprünglichen Graph G verbunden ist, müssen die Knoten G entsprechend mit 2 Farben gefärbt sein. Es folgt, dass G zweifärbbar.

b) **NP**-membership von **2-FÄRBBARKEIT**

c) $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Aufgabe 3.7
(**NP**-membership).
Betrachten Sie das folgende Entscheidungsproblem:

INDEPENDENT DOMINATING SET (IDS)

INSTANZ: Ein *gerichteter* Graph $G = (V, E)$.

FRAGE: gibt es eine Knotenmenge $S \subseteq V$ die folgenden Eigenschaften genügt:

(1) für alle Kanten $(u, v) \in E$, $\{u, v\} \not\subseteq S$;

(2) für alle Knoten $v \in V$ ist entweder $v \in S$ oder es exisitert eine Kante $(u, v) \in E$, sodass $u \in S$.

Zeigen Sie **IDS** $\in$ **NP** auf 3 Arten:

a) mittels Reduktion auf **SAT** – geben Sie eine Reduktion an und zeigen Sie deren Korrektheit (9 Punkte)

b) mittels choice-Programm – es reicht das Programm anzugeben (3 Punkte)

c) mittels Zertifikats-Relation – es reicht die Relation zu definieren (3 Punkte)

(15 Punkte)

Lösung 3.7

a) Die folgende Funktion R liefert eine polynomielle many-one Reduktion von **IDS** nach **SAT**: für einen gerichteten Graph $G = (V, E)$, sei

$$R(G) = \bigwedge_{(u,v)\in E} (\neg x_u \vee \neg x_v) \wedge \bigwedge_{v\in V} (x_v \vee \bigvee_{(u,v)\in E} x_u).$$

Wir nutzen hier also die Knotennamen direkt als Atome.

Wir zeigen: G ist eine positive Instance von **IDS** $\Longleftrightarrow$ $R(G)$ ist eine positive Instanz von **SAT**.

($\Longrightarrow$): Sei G eine positive Instanz von **IDS**. D.h. es gibt eine Menge $S \subseteq V$ die (1) und (2) aus der Problemdefinition erfüllt. Wir definieren eine Wahrheitswertbelegung I für $R(G)$ wie folgt: $I(x_v) = \mathit{true}$ für $v \in S$; $I(x_v) = \mathit{false}$ für $v \in V \setminus S$.

Wir zeigen zuerst dass $\varphi_1 = \bigwedge_{(u,v)\in E}(\neg x_u \vee \neg x_v)$ auf *true* unter I evaluiert. Sei $(u, v) \in E$. Wenn $u \notin S$, ist $(\neg x_u \vee \neg x_v)$ *true* in I, da $I(\neg x_u) = \mathbf{true}$; Wenn $u \in S$, ist wegen (1) $v \notin S$, und daher $(\neg x_u \vee \neg x_v)$ *true* in I ($I(\neg x_v) = \mathbf{true}$). Da dies für alle Kanten gilt, folgt dass φ_1 *true* in I.

Betrachte nun $\varphi_2 = \bigwedge_{v\in V}(x_v \vee \bigvee_{(u,v)\in E} x_u)$. Sei $v \in V$. Wenn $v \in S$ dann ist $x_v \vee \bigvee_{(u,v)\in E} x_u$ *true* in I aufgrund des ersten Disjunkts x_v. Wenn $v \notin S$, folgt aus (2) dass wir eine Kante $(u, v) \in E$ haben wobei $u \in S$. Dann ist das entsprechende Disjunkt in $\bigvee_{(u,v)\in E} x_u$ *true* in I. Da dies für alle Knoten gilt, ist $I(\varphi_2) = \mathbf{true}$. $R(G)$ ist daher eine positive Instanz von **SAT**.

($\Longleftarrow$): Nehmen wir nun an dass $R(G)$ eine positive Instanz von **SAT** ist. Dann gibt es eine Wahrheitswertbelegung I für die Atome in $R(G)$, sodass $I(R(G)) = \mathbf{true}$. Wir definieren nun die Menge $S = \{v \in V \mid I(x_v) = \mathit{true}\}$ und zeigen dass S die Eigenschaften (1) und (2) aus der Problemdefinition erfüllt. S ist dann eine positive Instanz von **IDS**.

(1): Indirekt. Nehmen wir an (1) ist durch S nicht erfüllt, d.h. es gibt eine Kante $(u, v) \in E$ sodass $u, v \in S$. Laut Konstruktion ist $I(x_u) = I(x_v) = \mathit{true}$. Dann ist aber das Konjunkt $(\neg x_u \vee \neg x_v)$ im ersten Teil der Formel $R(G)$ falsch in I. Folgerichtig ist $R(G)$ ist falsch unter I. Widerspruch! Daher erfüllt S Eigenschaft (1).

(2): Ebenfalls indirekt. Nehmen wir an (2) ist durch S nicht erfüllt, d.h. es gibt einen Knoten $v \in V$ sodass $v \notin S$ und für alle Kanten auf v, also $(u, v) \in E$, gilt $u \notin S$. Laut Konstruktion, haben wir dann $I(x_v) = \mathit{false}$ und, für alle u with $(u, v) \in E$, ebenfalls $I(x_u) = \mathit{false}$. Da $R(G)$ die Teilformel $x_v \vee \bigvee_{(u,v)\in E} x_u$ als Konjunkt hat, evaluiert diese Teilformel dann auf falsch in I, und das gilt daher auch für $R(G)$. Widerspruch! Daher erfüllt S Eigenschaft (2).

b) Es reicht folgenden Pseudo-Code anzugeben: (I) Rate eine Knotenmenge $S \subseteq V$ - dies geht mittels linear vieler Choice-Statements. (II) Überprüfe ob S die Eigenschaften (1) und (2) erfüllt. Dies geht in linearer bzw. quadratischer Zeit in der Größe des Graphs.

c) Definiere $R = \{(G, S) \mid S \text{ erfüllt (1) und (2) auf } G\}$. R ist eine polynomiell balanzierte und polynomiell entscheidbare Zertifikatrelation.

Aufgabe 3.8

(NP-Härte).

Wir zeigen abschließend **NP**-Härte – und somit **NP**-Vollständigkeit – von **IDS** (siehe Aufgabe 3.7) und zwar mittels Reduktion von **3-SAT**. Wir definieren $R(\cdot)$ sodass jede 3-KNF Instanz

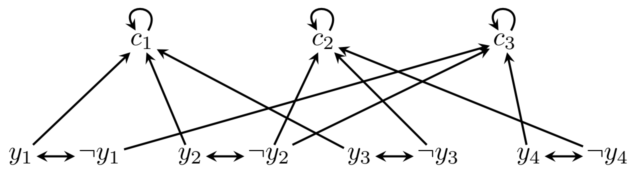
$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} \left(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}\right)$$

über Atome Y auf folgende Instanz von **IDS** reduziert wird: $R(\varphi) = G_\varphi = (V, E)$ mit

- $V = Y \cup \overline{Y} \cup \{c_1, \dots, c_m\}$
- $E = \{(y, \neg y), (\neg y, y) \mid y \in Y\} \cup \{(l_{ij}, c_i), (c_i, c_i) \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le 3\}$

wobei $\overline{Y} = \{\neg y \mid y \in Y\}$ und $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$.

Beispiel: G_φ für Formel $\varphi = (y_1 \vee y_2 \vee y_3) \wedge (\neg y_2 \vee \neg y_3 \vee \neg y_4) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee y_4)$ ist



Zeigen Sie die Korrektheit dieser Reduktion.

(15 Punkte)

Lösung 3.8

Wir zeigen φ ist erfüllbar $\iff$ G_φ ist eine positive Instanz von **IDS**.

$\Rightarrow$: Sei I eine Wahrheitswertbelegung auf Atome Y welche φ wahr macht. Wir zeigen, dass

$$S = \{y \mid I(y) = \mathit{true}\} \cup \{\neg y \mid I(y) = \mathit{false}\}$$

ein Zeuge für G_ϕ ist, d.h. S erfüllt Eigenschaften (1) und (2). G_ϕ ist dann eine positive Instanz von **IDS**.

Angenommen S verletzt (1). Dann gibt es eine Kante $(u, v) \in E$ sodass $u, v \in S$. Laut Definition von S und Konstruktion von G_φ, haben wir $y, \neg y \in S$. Dann ist aber I keine Wahrheitswertbelegung. Widerspruch.

Angenommen also S verletzt (2). Dann gibt es einen Knoten $v \in V$ sodass $v \notin S$ und für alle $(u, v) \in E$, $u \notin S$. v kann laut Definition von S und da I eine Wahrheitswertbelegung ist, nicht der Gestalt y oder $\neg y$ sein. Also muss v ein Knoten c_i sein und weder darf l_{i1}, l_{i2} noch l_{i3} in S sein. Laut Konstruktion von S, ist daher $I(l_{i1}) = I(l_{i2}) = I(l_{i3}) = \mathit{false}$. Aber dann ist auch φ falsch in I. Widerspruch zur Annahme.

$\Leftarrow$: Sei G_φ eine positive Instanz von **IDS**. Dann gibt es eine Menge $S \subseteq V$ die die Eigenschaften (1) und (2) erfüllt. Wir zeigen, dass die Belegung

$$I(y) = \mathit{true} \text{ wenn } y \in S \qquad I(y) = \mathit{false} \text{ wenn } \neg y \in S$$

φ wahr macht. Indirekt: Angenommen das ist nicht der Fall. Dann gibt es eine Klausel $(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in φ die falsch in I ist. Laut Definition von I haben wir $l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} \notin S$. Betrachte nun Knoten c_i in G_φ. Wir müssen $c_i \notin S$ haben, da S sonst (1) verletzt. Die verbleibenden adjazenten Knoten u mit $(u, c_i) \in E$ sind genau l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} laut Reduktion. Dann verletzt S Eigenschaft(2). Widerspruch.