2. Bewegungsgleichungen

Aufgabe 2.1 (Hebelbremse). Im folgenden Beispiel wird eine Trommel mit dem Radius r und dem Massenträgheitsmoment I betrachtet, siehe Abb. 2.1. Die Trommel dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und hat anfangs die Winkelgeschwindigkeit $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Der Drehwinkel der Trommel $\varphi(t)$ ist zum Anfangszeitpunkt gleich Null. Die Trommel soll durch einen Bremshebel der Länge l_2 zum Stillstand gebracht werden. Hierzu ist der Bremshebel an der Stelle $x = 0$ drehbar gelagert und an der Stelle $x = l_2$ wirkt eine externe Kraft f_{ext}. Bei $x = l_1$ kommt es zum reibungsbehafteten Kontakt zwischen Hebel und Trommel. Die Reibung dieses Kontakts wird durch trockene Gleitreibung mit dem Koeffizienten μ modelliert.

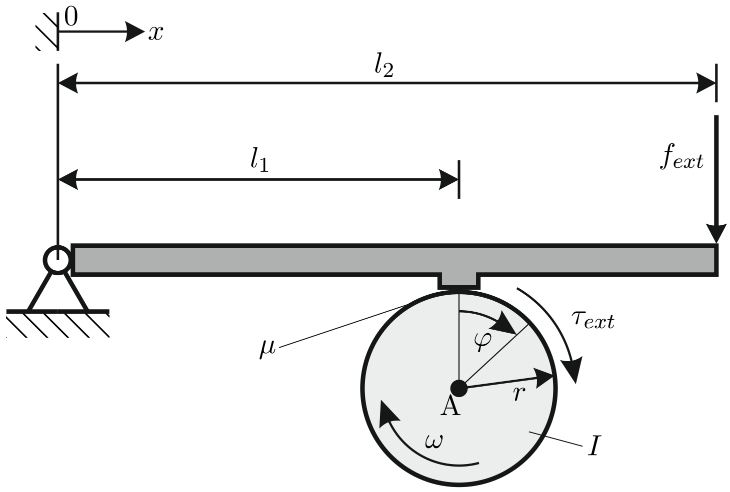

Abbildung 2.1.: Trommel mit Bremshebel.

Für die Unterpunkte a) bis e) gilt, dass die Trommel reibungsfrei im Punkt A gelagert ist sowie dass das externe Moment τ_{ext} gleich Null ist:

a) Schneiden Sie die Trommel und den Bremshebel frei und tragen Sie alle relevanten Kräfte ein. Bestimmen Sie die Normalkraft f_N zwischen dem Hebel und der Trommel sowie die Reibkraft f_R.

b) Geben Sie den Drehimpulssatz für die Trommel an sowie die entsprechenden Anfangsbedingungen.

c) Lösen Sie die Differentialgleichung und bestimmen Sie mittels der Lösung die Zeit t_s, den Drehwinkel φ_s sowie die Anzahl an Umdrehungen n_s bis zum Stillstand.

d) Wie lautet die kinetische Energie T_0 und T_E der Trommel im Anfangszustand sowie im Endzustand (Stillstand)?

e) Der Winkel φ_s bis zum Stillstand kann auch aus der Reibarbeit $W = \int_0^{\varphi_s} \tau_R \, \mathrm{d}\varphi$ mit dem Reibmoment τ_R berechnet werden. Die verrichtete Reibarbeit ergibt sich aus dem Arbeitssatz zu $W = T_E - T_0$. Berechnen Sie die Anzahl der Umdrehungen n_s bis zum Stillstand aus der Reibarbeit.

Für die Unterpunkte f) bis h) gilt, dass im Punkt A eine Drehfeder mit der Federkonstanten c und dem entspannten Winkel $\varphi = 0$, ein Dämpfer mit dem viskosen Dämpfungskoeffizienten d sowie das externe Moment $\tau_{ext} \neq 0$ wirkt. Die Feder ist im Ruhezustand entspannt:

f) Welche zusätzlichen Momente wirken nun an der Trommel? Geben Sie den Drehimpulssatz für die Trommel an.

g) Führen Sie die resultierende Differentialgleichung in Zustandsraumdarstellung (d.h. in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung) über und bestimmen Sie die Ruhelagen.

h) Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des Differentialgleichungssystems aus Unterpunkt g) in Maple.

Aufgabe 2.2 (Starrkörpersystem). Ein Block mit der Masse m_B hängt nach Abb. 2.2 an einem starren, masselosen Seil. Das Seil wird über eine masselose Rolle geführt und auf einer Trommel (Masse m_T, Trägheitsmoment I_{zz}) aufgewickelt. Die Trommel rollt über die Kontaktfläche ohne dabei zu gleiten. Zudem wirkt eine Feder mit der entspannten Länge x_0 und der konstanten Federsteifigkeit k der Bewegung der Trommel entgegen. Das gesamte System befindet sich im Schwerefeld mit der Erdbeschleunigung g.

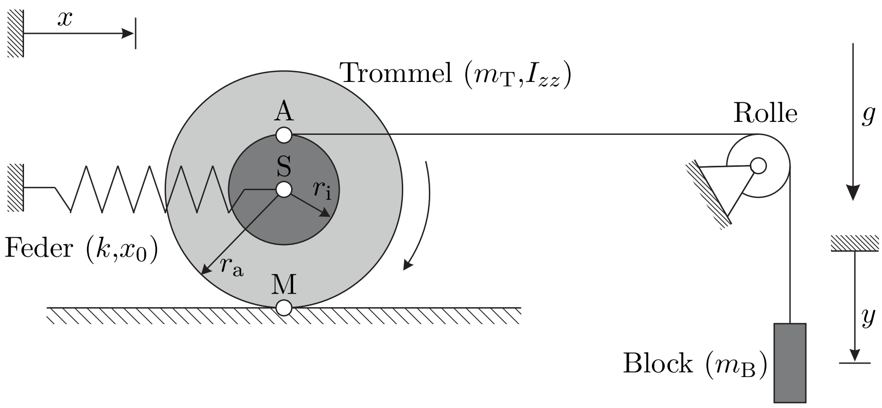

Abbildung 2.2.: Skizze einer Masse Seiltrommel mit Last.

> **Hinweis:** Für die Behandlung der Unterpunkte g) – h) wird die Verwendung von Computeralgebra-Programmen wie z.B. Maple empfohlen.

a) Schneiden Sie die einzelnen Körper frei und zeichnen sie alle auftretenden Schnittgrößen und eingeprägten Kräfte ein.

b) Geben Sie alle Kräftegleichgewichte der Rolle an.

c) Stellen sie alle Impulsbilanzen für die Trommel auf.

d) Geben Sie die Impulsbilanz für den Block an.

e) Geben Sie die Zwangsbedingung des Rollvorgangs zwischen der Geschwindigkeit $\dot{x}_\mathrm{S}$ und der Drehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ sowie deren Zeitableitungen an. Geben Sie weiters die Zwangsbedingung zwischen der Geschwindigkeit des Blocks $\dot{y}$ und der Drehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ sowie deren Zeitableitungen zufolge des starren Seils an.

f) Geben Sie die Bewegungsdifferentialgleichung des Schwerpunktes x_S an und bestimmen Sie deren Gleichgewichtslage.

g) Lösen Sie die Bewegungsgleichung und überprüfen Sie die Gültigkeit der Annahme eines starren Seils.

h) Erweitern Sie das System um einen Dämpfer mit viskoser Dämpfung d parallel zur Feder.

Aufgabe 2.3 (Dynamik und Reibung). Ein Block der Masse m ist durch eine lineare Feder mit Steifigkeit k und entspannter Länge l_0 mit einem Körper verbunden, welcher sich mit konstanter Geschwindigkeit v_{ext} bewegt. Durch Reibung mit dem Untergrund wirkt eine Reibkraft f_R auf den Block, welcher sich mit Geschwindigkeit v relativ zur Oberfläche bewegt (siehe Abb. 2.3).

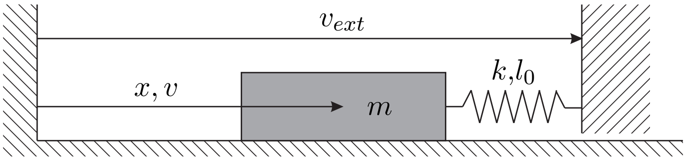

Abbildung 2.3.: Skizze.

Eine Vielzahl unterschiedlicher Reibeffekte lässt sich durch dynamische Reibmodelle wie z.B. dem LuGre-Modell darstellen. Dabei hängt die Reibkraft

$$f_R = \sigma_0 \epsilon + \sigma_1 \dot{\epsilon} + dv \tag{2.1}$$

neben dem bekannten viskosen Term dv noch von einem internen Zustand ϵ und dessen Zeitableitung ab, welcher durch die Differentialgleichung

$$\dot{\epsilon} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} \epsilon \tag{2.2}$$

beschrieben wird, wobei $g(v) = f_C + (f_H - f_C) \exp(-|v/v_S|)$ mit der Coulombkraft f_C, der Haftkraft f_H und der Schwellengeschwindigkeit v_S.

Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit
k	2	N/m	m	0.5	kg
σ_0	$2.9 \cdot 10^2$	N s/m	σ_1	107	N s^2/m
f_C	1	N	f_H	3	N
v_{ext}	1.5	m/s	v_S	0.3	m/s

Tabelle 2.1.: Parameterwerte zur numerischen Lösung.

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Blocks für eine Reibkraft f_R gemäß (2.1) her und schreiben Sie dieses als Differentialgleichungssystem 1. Ordnung an.

b) Transformieren Sie absolute Position auf die relative Auslenkung der Feder $l = x_{ext} - x - l_0$.

c) Bestimmen Sie die stationäre Lösung des LuGre-Modells $f_{R,s}(v)$ und vergleichen Sie diese mit viskoser Reibung $f_R = dv$.

d) Analysieren Sie durch (numerische) Lösung der Bewegungsgleichung die Effekte des LuGre-Modells mit dem Verhalten bei viskoser Reibung. Was beobachten Sie für unterschiedliche Werte von $d \in (0, 1)$ für Parameter gemäß Tab. 2.1?

Hinweis: Die Behandlung des Unterpunkts d) benötigt numerische Algorithmen zur Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungen wie beispielsweise in Maple (rudimentär) oder Matlab (umfangreich) vorhanden. Beachten Sie, dass das resultierende Anfangswertproblem durch das LuGre-Modell meist sehr steif ist und ggf. spezielle numerische Algorithmen erfordert, um zuverlässige Lösungen zu erhalten.