

Theoretische Informatik

Übungsblatt 4 (2025W)

Lösungsvorschlag

Allgemeine Hinweise:

- Die Deadline für die Abgabe der Lösungen zum Übungsblatt 4 ist der **14. Dezember 2025**.
- Wiederholung von der Vorbesprechung: Eine Abgabe besteht aus *einer* PDF-Datei. Punkte gibt es für jeden ernsthaften Lösungsversuch, auch wenn die Lösung falsch ist. Nur abgeschriebene Lösungen werden mit 0 Punkten bewertet. Die Verwendung von Latex wird nachdrücklich empfohlen (ein Latex template wurde auf TUWEL bereitgestellt). Handschriftliche Lösungen sind okay, solange sie *gut* lesbar sind.
- Das Übungsblatt 4 enthält 7 Fragen mit max. 10 Punkten und 2 Fragen mit max. 15 Punkten, sodass auf das Übungsblatt 4 max. 100 Punkte erzielt werden können. Gemeinsam mit den anderen Übungsblättern werden insgesamt max. 400 Punkte erreichbar sein. Das Gesamtergebnis für den Übungsteil der VU wird dann durch Division mit 10 und Aufrunden berechnet (also max. 40 Punkte auf den Übungsteil). Auf diese Weise werden Bruchteile von Punkten sowie mehrmaliges Runden vermieden.

Aufgabe 4.1

(Transitivität von Reduktionen).

Wir haben drei Entscheidungsprobleme gegeben: P_1 , P_2 und P_3 . Wir wissen, dass $P_2 \in \mathbf{NP}$ und dass P_3 **NP**-hart ist.

Welche zusätzlichen Aussagen über P_1 , P_2 und P_3 können wir bzgl. **NP** (und zwar in Bezug auf Membership, Härte bzw. Vollständigkeit) treffen, wenn folgende zwei polynomielle many-one Reduktionen gelten:

- a) $P_1 \leq_R P_2$ und $P_2 \leq_R P_3$
- b) $P_1 \leq_R P_3$ und $P_2 \leq_R P_3$
- c) $P_1 \leq_R P_3$ und $P_3 \leq_R P_2$
- d) $P_1 \leq_R P_2$ und $P_3 \leq_R P_1$

(10 Punkte)

Lösung 4.1

- a) P_1 ist in **NP**.
- b) keine
- c) P_2 und P_3 sind **NP**-vollständig, P_1 ist in **NP**.
- d) P_1 , P_2 und P_3 sind **NP**-vollständig.

Aufgabe 4.2

(Komplexität - Spezialfall). Wir haben drei Entscheidungsprobleme gegeben: P_1 , P_2 und P_3 . Wir wissen, dass P_3 **NP**-vollständig ist und dass P_2 ein Spezialfall von P_1 (also alle Instanzen von P_2 sind auch Instanzen von P_1 bei gleicher Fragestellung).

- a) Überlegen Sie sich passende Probleme für P_1 und P_2 aus dem Bereich der Aussagenlogik, die nicht in der Vorlesung besprochen wurden, und geben Sie diese vollständig an (Instanz, Frage).
- b) Sie sollen nun **NP**-Vollständigkeit für P_1 und P_2 ausgehend von P_3 zeigen. Welche Reduktionen zwischen P_1 , P_2 und P_3 sind dafür notwendig? Versuchen Sie die Anzahl der Reduktionen minimal zu halten und begründen Sie kurz Ihre Antwort. (Sie brauchen hier keine konkrete Reduktion anzugeben, sondern lediglich spezifizieren, welches Problem auf welches reduziert werden soll).

(10 Punkte)

Lösung 4.2

- a) Mögliche Antwort: Instanzen von P_1 bzw. P_2 sind Formeln in KNF und jedes Atom kommt in maximal 3 bzw. 2 Klauseln vor. Frage: Gegeben eine solche Formel, ist diese erfüllbar?
- b) Man kommt mit 2 Reduktionen aus, z.B. $P_3 \leq_R P_2$ und $P_1 \leq_R P_3$. Mit der ersten Reduktion erhalten wir **NP**-Härte für P_2 ; da P_2 ein Spezialfall von P_1 ist, erhalten wir unmittelbar **NP**-Härte für P_1 . Mit der zweiten Reduktion erhalten wir **NP**-Membership für P_1 , und da P_2 ein Spezialfall von P_1 ist, erhalten wir unmittelbar **NP**-Membership für P_2 . Es folgt, dass P_1 und P_2 **NP**-vollständig sind.

Aufgabe 4.3

(Reduktion 1 von **4-FÄRBBARKEIT (4-COL)** auf **SAT**).

4-FÄRBBARKEIT (4-COL)

INSTANZ: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

FRAGE: Ist der Graph G 4-färbbar? D.h.: Existiert eine Funktion f von V nach $\{0, 1, 2, 3\}$ sodass $f(v_1) \neq f(v_2)$ für alle Kanten $[v_1, v_2] \in E$?

Geben Sie eine Reduktion von **4-FÄRBBARKEIT (4-COL)** auf **SAT** an, indem Sie für jeden Knoten *vier* Atome verwenden und mit geeigneten Klauseln sicherstellen, dass jeder Knoten *genau eine* Farbe hat und adjazente Knoten *nicht* dieselbe Farbe haben (vgl. Vorlesungsfolien Reduktion von **3-COL** auf **SAT**). Die Reduktion soll also jeden beliebigen Graphen G auf eine aussagenlogische Formel ϕ_G reduzieren.

Beweisen Sie die “ $\Leftarrow$ ”-Richtung der Korrektheit der Reduktion, d.h.: Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist die Formel ϕ_G erfüllbar, so ist der Graph G 4-färbbar.

(15 Punkte)

Lösung 4.3

Im Folgenden wird die Reduktion von **4-FÄRBBARKEIT** auf **SAT** angegeben:

Sei $G = (V, E)$ eine beliebige Instanz von **4-FÄRBBARKEIT**, d.h.: $G = (V, E)$ ist ein ungerichteter Graph mit Knoten $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und Kanten E . Wir verwenden als Farben $\{r, g, b, o\}$ anstatt $\{0, 1, 2, 3\}$.

Für die zu konstruierende Formel verwenden wir Atome a_i^c , mit $1 \leq i \leq n$ und $c \in \{r, g, b, o\}$. Intuition: Wenn a_i^c auf wahr gesetzt ist, dann ist Knoten v_i mit Farbe c gefärbt.

Betrachten Sie für beliebiges $n \geq 0$ die aussagenlogischen Formeln

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (a_i^r \vee a_i^g \vee a_i^b \vee a_i^o), \\ \phi_2 &= \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (\neg(a_i^r \wedge a_i^g) \wedge \neg(a_i^r \wedge a_i^b) \wedge \neg(a_i^g \wedge a_i^b) \wedge \neg(a_i^o \wedge a_i^r) \wedge \neg(a_i^o \wedge a_i^g) \wedge \neg(a_i^o \wedge a_i^b)), \\ \phi_3 &= \bigwedge_{[v_i, v_j] \in E} (\neg(a_i^r \wedge a_j^r) \wedge \neg(a_i^g \wedge a_j^g) \wedge \neg(a_i^b \wedge a_j^b) \wedge \neg(a_i^o \wedge a_j^o)).\end{aligned}$$

Wir definieren die Reduktion $R(\cdot)$, die für jeden Graphen G , eine **SAT**-Instanz $R(G) = \phi_G$ mit $\phi_G = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$ liefert (in polynomieller Zeit).

Korrektheitsbeweis: “ $\Leftarrow$ ”-Richtung:

Wir zeigen, dass wenn ϕ_G eine positive Instanz von **SAT** ist, ist $G = (V, E)$ eine positive Instanz von **4-COL**.

Sei I eine Wahrheitsbelegung für ϕ_G . Da $\phi_G = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$, müssen wir zeigen, dass G 4-färbbar ist, wenn $I(\phi_1) = \mathbf{true}$, $I(\phi_2) = \mathbf{true}$ und $I(\phi_3) = \mathbf{true}$ ist.

Zuerst zeigen wir, dass aus $I(\phi_1) = \mathbf{true}$ und $I(\phi_2) = \mathbf{true}$ folgt, dass für jedes i gilt, dass genau eines der Atome aus $(a_i^r, a_i^g, a_i^b, a_i^o)$ den Wahrheitswert **true** hat.

Wir fixieren ein i (mit $1 \leq i \leq n$), sodass $I(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mathbf{true}$:

- (1) Aus der Klausel $a_i^r \vee a_i^g \vee a_i^b \vee a_i^o$ (Teil von ϕ_1) folgt, dass mindestens eines der Atome $a_i^r, a_i^g, a_i^b, a_i^o$ in I den Wert **true** hat.

- (2) Angenommen, es seien zwei verschiedene Atome $a_i^{c_1}$ und $a_i^{c_2}$ mit $c_1 \neq c_2$ beide **true** unter I . Dann ist die Klausel $\neg(a_i^{c_1} \wedge a_i^{c_2})$ (Teil von ϕ_2) falsch in I , da sowohl $\neg a_i^{c_1}$ als auch $\neg a_i^{c_2}$ **false** sind. Das widerspricht der Annahme, dass $I(\phi_2) = \mathbf{true}$ erfüllt. Deswegen kann für jedes i höchstens ein Atom wahr sein.

Aus (1) und (2) folgt, dass für jedes i genau ein Atom von $a_i^r, a_i^g, a_i^b, a_i^o$ wahr ist. Folglich definieren wir eine Funktion $f: V \rightarrow \{r, g, b, o\}$, sodass $f(v_i) = c$ für alle $1 \leq i \leq n$, wobei $c \in \{r, g, b, o\}$ genau jenes c mit $I(a_i^c) = \mathbf{true}$ ist.

Wir müssen noch zeigen, dass f eine gültige 4-Färbung von G ist. Wir zeigen das indirekt und nehmen an, dass es eine Kante $[v_i, v_j]$ in G gibt, sodass $f(v_i) = f(v_j) = c$. Laut Definition von f gilt daher, dass $I(a_i^c) = I(a_j^c) = \mathbf{true}$. Laut Problemreduktion enthält ϕ_3 dann die Teilformel $\neg(a_i^c \wedge a_j^c)$. Es folgt, dass $I(\neg(a_i^c \wedge a_j^c)) = \mathbf{false}$ und daher $I(\phi_G) = \mathbf{false}$. Laut Annahme ist aber $I(\phi_G) = \mathbf{true}$. Widerspruch.

Es gilt daher, dass f eine gültige 4-Färbung von G ist. Somit ist G eine positive Instanz von **4-COL**.

Aufgabe 4.4

(Reduktion 2 von **4-FÄRBBARKEIT (4-COL)** auf **SAT**).

Geben Sie eine Reduktion von **4-FÄRBBARKEIT (4-COL)** auf **SAT** an, indem Sie für jeden Knoten *zwei* Atome verwenden (binäre Kodierung). Argumentieren Sie, weshalb die von Ihnen angegebene Reduktion korrekt ist.

(15 Punkte)

Lösung 4.4

Im Folgenden wird die Reduktion von **4-FÄRBBARKEIT** auf **SAT** angegeben:

Sei $G = (V, E)$ eine beliebige Instanz von **4-FÄRBBARKEIT**, d.h.: $G = (V, E)$ ist ein ungerichteter Graph mit Knoten $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und Kanten E .

Jeder Knoten v_i erhält zwei Atome x_i und y_i , die seine Farbe in Binärdarstellung kodieren, z.B.:

$$00 \equiv \text{Farbe 0}, \quad 01 \equiv \text{Farbe 1}, \quad 10 \equiv \text{Farbe 2}, \quad 11 \equiv \text{Farbe 3}.$$

Somit werden die vier möglichen Farben durch alle möglichen Belegungen der beiden Atome (x_i, y_i) repräsentiert.

Für jede Kante $[v_i, v_j] \in E$ gilt, dass die Knoten v_i und v_j *nicht* dieselbe Farbe haben dürfen. Da die Farbe durch das Paar (x_i, y_i) bzw. (x_j, y_j) kodiert ist, muss die folgende Bedingung für jede Kante gelten:

$$\neg((x_i = x_j) \wedge (y_i = y_j)) \Leftrightarrow ((x_i \neq x_j) \vee (y_i \neq y_j))$$

Die Ungleichheit der Wahrheitswerte zweier Atome kann in der Aussagenlogik wie folgt formuliert werden:

$$(x_i \vee x_j) \wedge (\neg x_i \vee \neg x_j)$$

Die Reduktion $R(\cdot)$ liefert (in polynomieller Zeit) für jeden Graphen G eine **SAT**-Instanz $R(G) = \phi_G$ mit

$$\phi_G = \bigwedge_{[v_i, v_j] \in E} ((x_i \vee x_j) \wedge (\neg x_i \vee \neg x_j)) \vee ((y_i \vee y_j) \wedge (\neg y_i \vee \neg y_j))$$

Wir argumentieren nun, dass die angegebene Reduktion korrekt ist. Die Reduktion ist korrekt, da jede erfüllende Belegung der Formel ϕ_G genau einer gültigen 4-Färbung des Graphen G entspricht und umgekehrt.

Eine erfüllende Belegung weist jedem Knoten v_i ein eindeutiges Paar (x_i, y_i) zu, sodass für keine Kante $[v_i, v_j]$ gilt $(x_i, y_i) = (x_j, y_j)$. Dies wird durch die Teilformeln sichergestellt. Somit haben benachbarte Knoten verschiedene Farben.

Umgekehrt kann jede gültige 4-Färbung des Graphen durch eine geeignete Wahrheitsbelegung der Atome realisiert werden, die ϕ_G erfüllt, da Atome jedem Knoten eine eindeutige Farbe zuweisen und die Teilformeln sicherstellen, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe haben.

Damit gilt: G ist 4-färbbar genau dann, wenn ϕ_G erfüllbar ist.

Aufgabe 4.5

(NP-Vollständigkeit).

Zeigen Sie, dass **4-COL NP**-vollständig ist, d.h.:

- a) Zeigen Sie mittels Choice-Programm, dass **4-COL** in **NP** ist. Es reicht, das Programm anzugeben.

- b) Wir wissen aus der Vorlesung, dass **3-COL NP**-vollständig ist. Zeigen Sie, dass **4-COL NP**-hart ist, indem Sie eine polynomielle many-one Reduktion von **3-COL** auf **4-COL** angeben. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktion.

(10 Punkte)

Lösung 4.5

- Es reicht den folgenden Pseudocode anzugeben: (I) Rate für jeden Knoten eine Farbe (mittels zweier Choice-Statements. (II) Überprüfe, ob diese Belegung eine gültige Färbung der Knoten erzeugt (polynomiell in der Anzahl der Kanten).
- Sei $G = (V, E)$ eine beliebige Instanz von **3-COL**, d.h. G ist ein ungerichteter Graph mit Knoten $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Wir konstruieren eine Instanz $G' = (V', E')$ von **4-COL** wie folgt:
 - $V' = V \cup \{v_{n+1}\}$, wobei v_{n+1} ein neuer Knoten ist.
 - $E' = E \cup \{[v_{n+1}, v] \mid v \in V\}$, d.h. v_{n+1} wird mit allen anderen Knoten verbunden.

Korrektheitsbeweis:

Wir zeigen, dass wenn G eine positive Instanz von **3-COL** ist, ist G' eine positive Instanz von **4-COL**.

“ $\Rightarrow$ ”-Richtung: Angenommen, G ist 3-färbbar. Dann gibt es eine Belegung aller Knoten von V mit Farben $\{0, 1, 2\}$, sodass keine benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben. Wir färben v_{n+1} mit einer neuen vierten Farbe. Dann sind alle Kanten in G' gültig gefärbt und G' ist 4-färbbar.

“ $\Leftarrow$ ”-Richtung: Angenommen, G' ist 4-färbbar. Der neue Knoten v_{n+1} (bzw. der Knoten, der mit allen anderen verbunden ist) muss eine Farbe haben, die sich von allen anderen Knoten unterscheidet, da er mit allen verbunden ist. Entfernt man v_{n+1} , verbleiben genau drei Farben für die ursprünglichen Knoten in V und keine Kanten haben dieselbe Farbe an beiden Knoten. Daher ist G 3-färbbar.

Aufgabe 4.6

(NP-Vollständigkeit Spezialfall).

4COL-EVEN#VERTICES ist wie folgt definiert:

4COL-EVEN#VERTICES

INSTANZ: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, wo die Anzahl der Knoten $|V|$ gerade ist.

FRAGE: Ist der Graph G 4-färbbar? D.h.: Existiert eine Funktion f von V nach $\{0, 1, 2, 3\}$ sodass $f(v_1) \neq f(v_2)$ für alle Kanten $[v_1, v_2] \in E$?

Zeigen Sie, dass **4COL-EVEN#VERTICES** NP-vollständig ist, d.h.:

- a) Zeigen Sie, dass **4COL-EVEN#VERTICES** in NP ist.
- b) Zeigen Sie, dass **4COL-EVEN#VERTICES** NP-hart ist, indem Sie eine polynomielle many-one Reduktion von **4-COL** auf **4COL-EVEN#VERTICES** angeben. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktion.

(10 Punkte)

Lösung 4.6

- **4COL-EVEN#VERTICES** ist ein Spezialfall von **4-COL**, d.h. jede Instanz von **4COL-EVEN#VERTICES** ist auch Instanz von **4-COL**. Da **4-COL** $\in$ NP, folgt **4COL-EVEN#VERTICES** $\in$ NP direkt.
- Sei $G = (V, E)$ eine beliebige Instanz von **4-COL**, d.h. G ist ein ungerichteter Graph mit Knoten $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Wir konstruieren eine Instanz $G' = (V', E')$ von **4COL-EVEN#VERTICES** wie folgt:
 - $V' = V \cup W$, wobei W eine Kopie von Knoten in V ist.
 - $E' = E \cup F$, wobei F eine Kopie von Kanten in E ist.

$G' = G \cup H$ ist also eine disjunkte Vereinigung von G und seiner Kopie $H = (W, F)$.

Korrektheitsbeweis:

Wir zeigen, dass wenn G eine positive Instanz von **4-COL** ist, ist G' eine positive Instanz von **4COL-EVEN#VERTICES**.

“ $\Rightarrow$ ”-Richtung: Angenommen, G ist 4-färbbar. Dann ist eine isomorphe Kopie H ebenfalls 4-färbbar. Daraus folgt, dass $G' = G \cup H$ auch 4-färbbar ist. Daher ist G' eine positive Instanz von **4COL-EVEN#VERTICES**.

“ $\Leftarrow$ ”-Richtung: Angenommen, G' ist 4-färbbar. Da $G' = (V \cup W, E \cup F)$ aus einer Vereinigung von G und seiner Kopie besteht, hat er auch eine gerade Anzahl an Knoten. Darüber hinaus folgt aus der 4-Färbbarkeit von G' , dass die beiden disjunkten Teile (G und H) ebenfalls 4-färbbar sein müssen. Daher ist G eine positive Instanz von **4-COL**.

Aufgabe 4.7

(NP-Vollständigkeit).

4COL-MORE-THAN-HALF-ONECOLOR ist wie folgt definiert.

4COL-MORE-THAN-HALF-ONECOLOR

INSTANZ: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

FRAGE: Ist der Graph G 4-färbbar, wobei zumindest die Hälfte der Knoten die Farbe 0 haben? D.h.: Existiert eine Funktion f von V nach $\{0, 1, 2, 3\}$, sodass $f(v_1) \neq f(v_2)$ für alle Kanten $[v_1, v_2] \in E$ und $|\{v \in V \mid f(v) = 0\}| \geq \frac{|V|}{2}$?

Zeigen Sie, dass **4COL-MORE-THAN-HALF-ONECOLOR** NP-vollständig ist:

- Zeigen Sie mittels Zertifikatsrelation, dass **4COL-MORE-THAN-HALF-ONECOLOR** in **NP** ist.
- Zeigen Sie, dass **4COL-MORE-THAN-HALF-ONECOLOR** NP-hart ist, indem Sie eine polynomielle many-one Reduktion von **4-COL** auf **4COL-MORE-THAN-HALF-ONECOLOR** angeben. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktion.

(10 Punkte)

Lösung 4.7

- $R = \{(G, f) \mid \text{Graph } G = (V, E) \text{ ist 4-färbbar und } |\{v \in V \mid f(v) = 0\}| \geq \frac{|V|}{2}\}$. R ist eine polynomiell balanzierte und polynomiell entscheidbare Zertifikatsrelation.
- Sei $G = (V, E)$ eine beliebige Instanz von **4-COL**, d.h. G ist ein ungerichteter Graph mit Knoten $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Wir konstruieren eine Instanz $G' = (V', E')$ von **4COL-MORE-THAN-HALF-ONECOLOR** wie folgt:
 - $V' = V \cup W$, wobei $|W| = |V| + 1$.
 - $E' = E$.

Wir fügen also $|V| + 1$ neue isolierte Knoten hinzu. Diese machen mehr als die Hälfte der Knoten von G' aus, sodass wir sie mit der Farbe 0 färben können, da

$$|\{w \in W \mid f(w) = 0\}| = |V| + 1 \geq \frac{|V'|}{2}$$

Korrektheitsbeweis:

Wir zeigen, dass wenn G eine positive Instanz von **4-COL** ist, ist G' eine positive Instanz von **4COL-MORE-THAN-HALF-ONECOLOR**.

“ $\Rightarrow$ ”-Richtung: Angenommen, G ist 4-färbbar. Dann ist G' ebenfalls 4-färbbar, da G' im Vergleich zu G keine zusätzlichen Kanten hat. Die neuen Knoten werden alle mit der Farbe 0 gefärbt, d.h., $f(w) = 0$ für alle $w \in W$. Selbst wenn $|\{v \in V \mid f(v) = 0\}| = 0$, haben wir $|W| = |V| + 1 \geq \frac{|V'|}{2}$. Daraus folgt,

dass G' 4-färbbar ist, wobei mehr als die Hälfte der Knoten die Farbe 0 haben. Daher ist G' eine positive Instanz von **4COL-MORE-THAN-HALF-ONECOLOR**.

“ $\Leftarrow$ ”-Richtung: Angenommen, G' ist 4-färbbar, wobei $|\{v \in V' \mid f(v) = 0\}| \geq \frac{|V|}{2}$. Dann bleibt G auch 4-färbbar, da G' im Vergleich zu G keine zusätzlichen Kanten hat. Wenn man die Knoten in W , die isoliert sind, hat das keinen Einfluss auf die 4-Färbbarkeit. Daher ist G eine positive Instanz von **4COL**.

Aufgabe 4.8

(NP-Härte).

Betrachten Sie das folgende Entscheidungsproblem:

HITTING SET

INSTANZ: Eine Menge von Mengen $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, wobei $S_i \subseteq U$ für jedes S_i und eine positive ganze Zahl $k \leq |U|$.

FRAGE: Gibt es eine Menge $H \subseteq U$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $|H| \leq k$;
- (2) für alle $S_i \in U$ ist $H \cap S_i \neq \emptyset$.

Wir zeigen die NP-Härte von **HITTING SET** mittels Reduktion von **VERTEX COVER** (siehe Vorlesungsfolien). Wir definieren $R(\cdot)$ so, dass jede Instanz eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und eines Parameters k auf folgende Instanz von **HITTING SET** reduziert wird:

$$R((G, k)) = (U, \mathcal{S}, k')$$

Dabei gilt Folgendes:

- Das Universum ist die Menge der Knoten:

$$U = V.$$

- Die Menge der Teilmengen ist:

$$\mathcal{S} = \{S_e \mid e \in E\}, \quad \text{wobei } S_e = \{v \in V \mid v \text{ ist inzident zu } e\}.$$

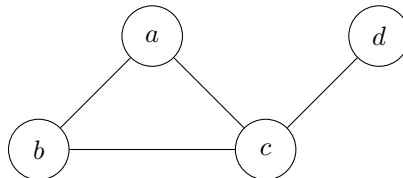
- Der Parameter bleibt gleich:

$$k' = k.$$

Beispiel:

Betrachten wir den folgenden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $k = 2$:

$$V = \{a, b, c, d\}, \quad E = \{[a, b], [a, c], [b, c], [c, d]\}.$$



Die Reduktion $R((G, k)) = (U, \mathcal{S}, k')$ ergibt sich nach obiger Definition wie folgt:

$$U = V = \{a, b, c, d\},$$

$$\mathcal{S} = \{S_{[a,b]}, S_{[a,c]}, S_{[b,c]}, S_{[c,d]}\},$$

wobei jede Teilmenge S_e die Endpunkte der jeweiligen Kante enthält:

$$S_{[a,b]} = \{a, b\}, \quad S_{[a,c]} = \{a, c\}, \quad S_{[b,c]} = \{b, c\}, \quad S_{[c,d]} = \{c, d\}.$$

Gesucht ist nun ein Hitting Set $H \subseteq U$ der Größe $k' = 2$, sodass gilt:

$$H \cap S_e \neq \emptyset \quad \text{für alle } S_e \in \mathcal{S}.$$

Eine mögliche Lösung ist

$$H = \{a, c\}.$$

$H = \{a, c\}$ ist ein Hitting Set der Größe 2, und zugleich ein Vertex Cover der Größe 2 im ursprünglichen Graphen G .

Beweisen Sie die “ $\Leftarrow$ ”-Richtung der Korrektheit der obigen Reduktion, d.h.: Existiert eine Menge $H \subseteq U$ mit $|H| \leq k$ und $H \cap S_i \neq \emptyset$ für alle $S_i \in \mathcal{U}$, so gibt es einen Vertex Cover N der Größe $\leq k$.

(10 Punkte)

Lösung 4.8

Korrektheitsbeweis: “ $\Leftarrow$ ”-Richtung:

Angenommen, es existiert ein Hitting Set $H \subseteq U$ der Größe von höchstens k , sodass $H \cap S_e \neq \emptyset$ für alle $S_e \in \mathcal{S}$ gilt.

Da jedes S_e die beiden inzidenten Knoten einer Kante $e = [v_i, v_j]$ enthält, bedeutet $H \cap S_e \neq \emptyset$, dass mindestens einer der beiden Knoten v_i oder v_j in H enthalten ist. Somit ist für jede Kante des ursprünglichen Graphen $G = (V, E)$ mindestens ein Knoten in H enthalten.

Daraus folgt unmittelbar, dass H ein Vertex Cover des Graphen G ist:

$$\forall e = [v_i, v_j] \in E : v_i \in H \text{ oder } v_j \in H.$$

Da $|H| = k$ gilt, ist H ein Vertex Cover der Größe von höchstens k .

Somit gilt: Wenn es ein Hitting Set H der Größe von höchstens k existiert, hat G ein Vertex Cover der Größe von höchstens k . Dies zeigt die “ $\Leftarrow$ ”-Richtung der Korrektheit der Reduktion.

Aufgabe 4.9

(NP-Membership).

Betrachten Sie die folgende Variante von **HITTING SET**:

1-HITTING SET

INSTANZ: Eine Menge von Mengen $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, wobei $S_i \subseteq U$ für jedes S_i .

FRAGE: Gibt es eine Menge $H \subseteq U$ mit der Eigenschaft, dass $|H \cap S_i| = 1$ für alle $S_i \in \mathcal{U}$ gilt?

Zeigen Sie **1-HITTING SET** $\in$ **NP**, indem Sie eine Reduktion auf **SAT** angeben. Argumentieren Sie, weshalb die von Ihnen angegebene Reduktion korrekt ist.

(10 Punkte)

Lösung 4.9

Wir zeigen **1-HITTING SET** $\in$ **NP** durch eine Reduktion auf **SAT**. Sei $(U, \mathcal{S})$ eine Instanz von **1-HITTING SET**: wobei $\mathcal{S} = S_1, \dots, S_n$ mit $S_i \subseteq U$ für alle i ist. Für jedes $u \in U$ führen wir eine Variable x_u ein.

Die Intuition ist: $x_u = \text{true}$ genau dann, wenn $u \in H$.

Wir bauen eine Formel $\phi_{(U, \mathcal{S})}$ als Konjunktion folgender Teilformeln:

- a) (*mindestens ein positives Atom* in jeder Menge)

Für jedes $i = 1, \dots, m$ die Klausel

$$\bigvee_{u \in S_i} x_u.$$

Diese Klausel stellt sicher, dass in S_i wenigstens ein Element in H sein muss.

- b) (*höchstens ein positives Atom* in jeder Menge)

Für jedes i und alle paarweisen verschiedenen Elemente $u, v \in S_i$ die Binärklauseln

$$(\neg x_u \vee \neg x_v).$$

Diese Klauseln verbieten, dass zwei verschiedene Elemente aus derselben S_i gleichzeitig in H sind.

Die Formel $\phi_{(U,S)}$ ist die Konjunktion aller obigen Klauseln.

Wir argumentieren nun die Korrektheit der angegebenen Reduktion.

“ $\Rightarrow$ ”-Richtung: Sei $H \subseteq U$ mit $|H \cap S_i| = 1$ für alle i . Setze für alle $u \in U$:

$$x_u = \text{true} \iff u \in H$$

Dann erfüllt die Belegung jede Klausel vom Typ a), weil sich in jedem S_i genau ein $u \in H$ befindet. Und sie verletzt keine Klausel vom Typ b), weil in keinem S_i zwei verschiedene Elemente aus H vorkommen. Also ist $\phi_{(U,S)}$ erfüllbar.

“ $\Leftarrow$ ”-Richtung: Sei $\phi_{(U,S)}$ erfüllbar mit einer erfüllenden Belegung I . Setze

$$H := \{u \in U \mid I(x_u) = \text{true}\}$$

Aufgrund der Klauseln vom Typ a) hat jedes S_i mindestens ein Element aus H und aufgrund der Klauseln vom Typ b) hat kein S_i mehr als ein Element aus H . Also gilt für alle i Folgendes: $|H \cap S_i| = 1$. Damit ist H ein Hitting Set der **1-HITTING SET**-Instanz.