05.04.
2017

ANALYSIS TEST 1 PANHOLZER

Üb 1 – 8 Pkt
Üb 2 – 8 Pkt
Üb 3 – 4 Pkt

1 | Konvergenzuntersuchung von $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} = \frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$

a) mittels Sandwhich-Theorem
b) Grenzwert bestimmen mithilfe vom b)

a) $b_n \leq a_n \leq c_n$

$b_n = \underbrace{\text{Anzahl Summanden}}_{n} * \underbrace{\text{kleinste Summand}}_{\frac{n}{n^2+n}} = \frac{n^2}{n^2+n}$

$c_n = \overbrace{\text{Anzahl Summanden}} * \underbrace{\text{größte Summand}}_{\frac{n}{n^2+1}} = \frac{n^2}{n^2+1}$

$\underbrace{\lim_{n\to\infty} b_n}_{\Downarrow} = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}^{1}}{\cancel{n^2}(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0})} = 1$

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0})} = 1$

$\Rightarrow (a_n)$ konvergiert gegen $\underline{\underline{1}}$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\underline{1}}$

2| Konvergenzuntersuchung u. Grenzwertbestimmung mittels Summenteilfolge / Teleskopsumme von $\sum_{n\geq 1} \frac{4}{n(n+2)}$

Lösung: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+2)}$

$$\frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} = \frac{4}{k(k+2)} \quad / k(k+2) \Rightarrow Ak + 2A + Bk = 4$$

$$k(A+B) = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$2A = 4 \Rightarrow \boxed{A = 2} \qquad \boxed{B = -2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+2} \right) = \frac{2}{1} - \cancel{\frac{2}{3}} + \frac{2}{2} - \cancel{\frac{2}{4}} + \cancel{\frac{2}{3}} - \cancel{\frac{2}{5}} + \dots - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}$$

$$\boxed{S_n = 3 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n} \neq \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} \right) \boxed{= 3}$$

3| $d_n = \frac{(n+1)^2 \left(\cos \frac{n\pi}{2} + 1 \right) - 1}{n+1} + (-1)^n$

	$-\infty$	-1	0	1	2	$1/2$	$2/3$	$+\infty$
$\limsup_{n\to\infty} d_n$								X
$\liminf_{n\to\infty} d_n$				X				
$\sup d_n$								X
$\inf d_n$				~~X~~		X		

Lösungsweg: $\inf d_n \in \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$

d_0, d_1, d_2, d_3 bestimmen und Schlussfolgerung ziehen