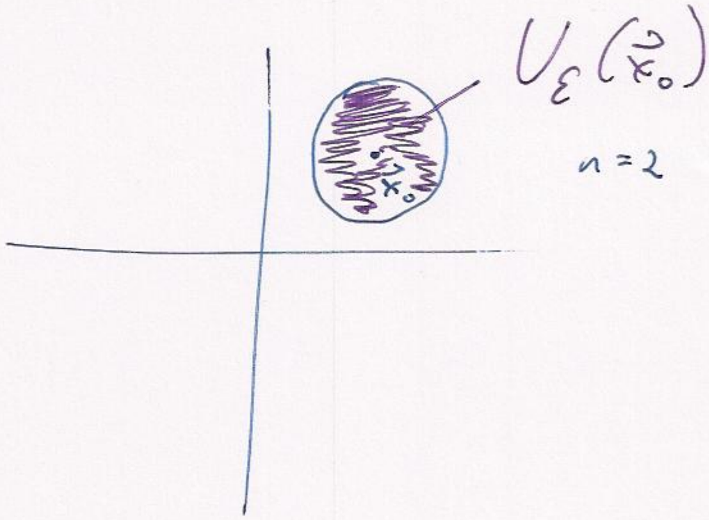
Grenzwert und Stetigkeit für Fkt. in mehreren Var.:

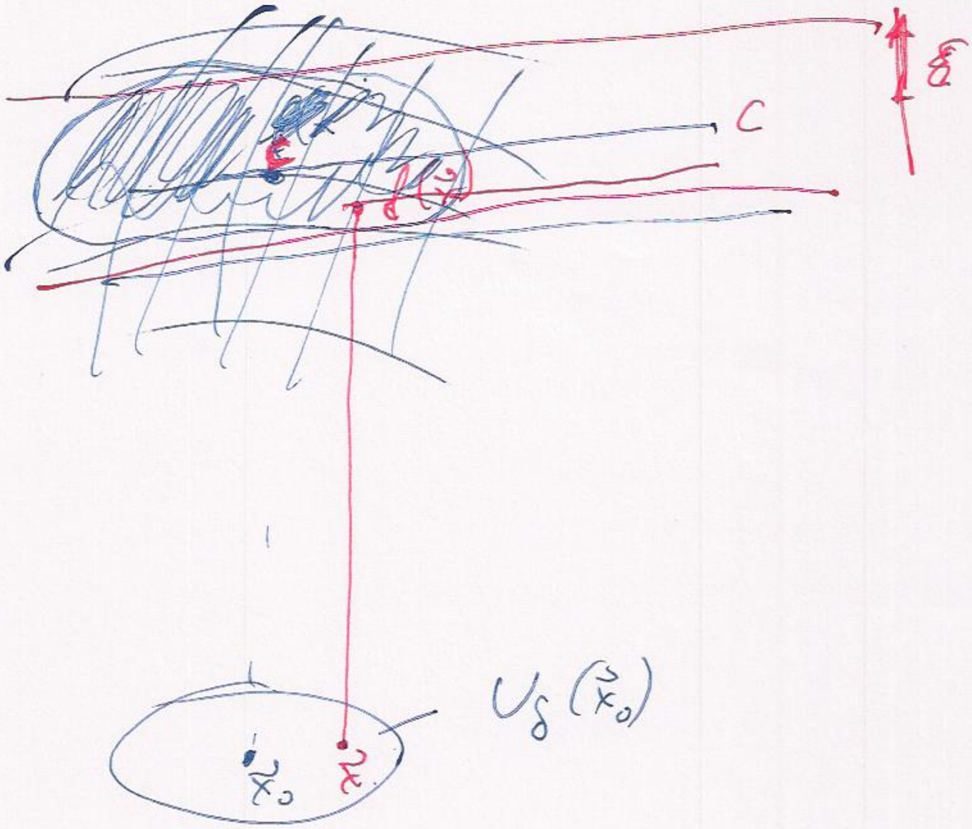


Def.: ε-Umgebung eines Punktes $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}_{\text{Abstand zwischen } \vec{x} \text{ und } \vec{x}_0} < \varepsilon\}$$

$n=2$: Kreisscheibe

$n=3$: Ball


ε
C
$f(\vec{x})$
$U_\delta(\vec{x}_0)$
$\vec{x}$
$\vec{x}_0$

Def.: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$.

Grenzwert $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = c$

$$:\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in D$ mit $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$

$$\Downarrow$$

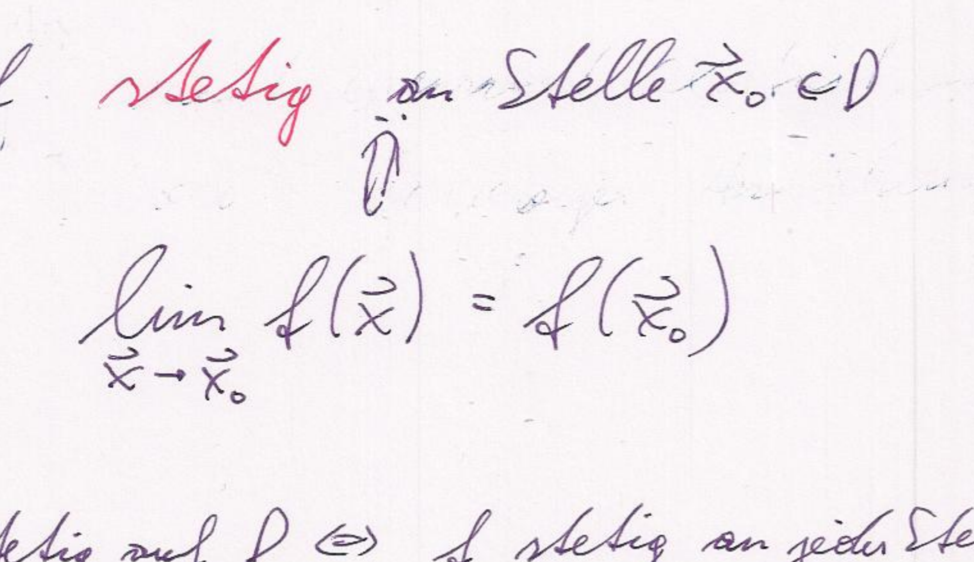
$$|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$$

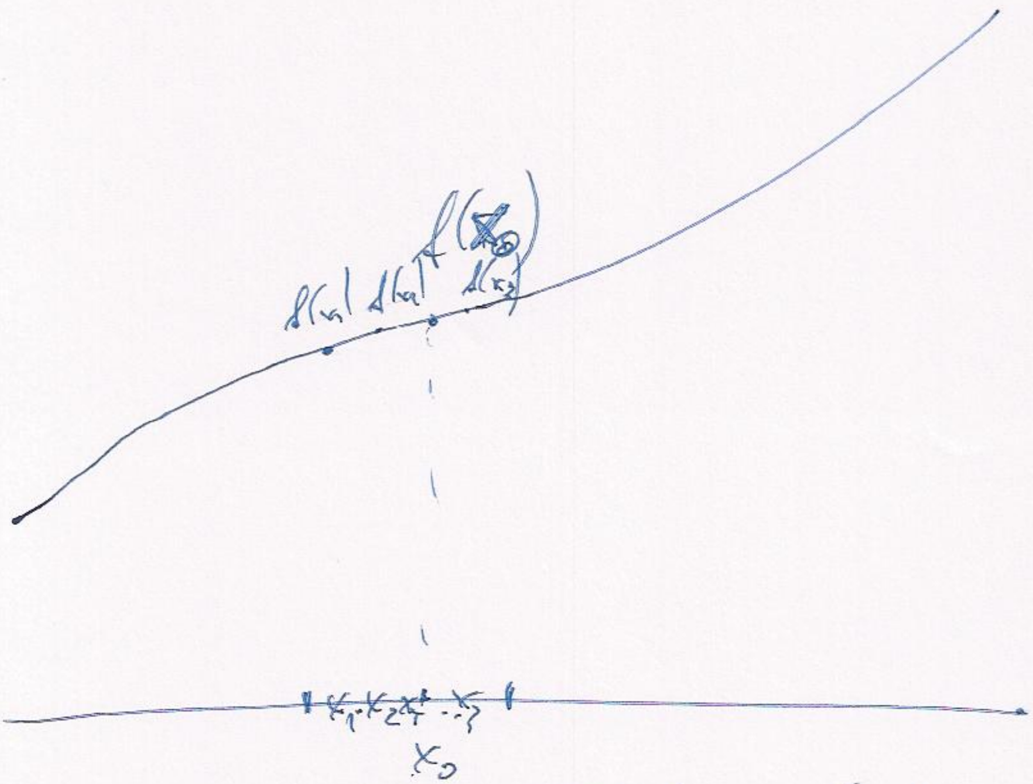
Def. f stetig an Stelle $\vec{x}_0 \in D$

$$:\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

f stetig auf D $\Longleftrightarrow$ f stetig an jeder Stelle $\vec{x}_0 \in D$





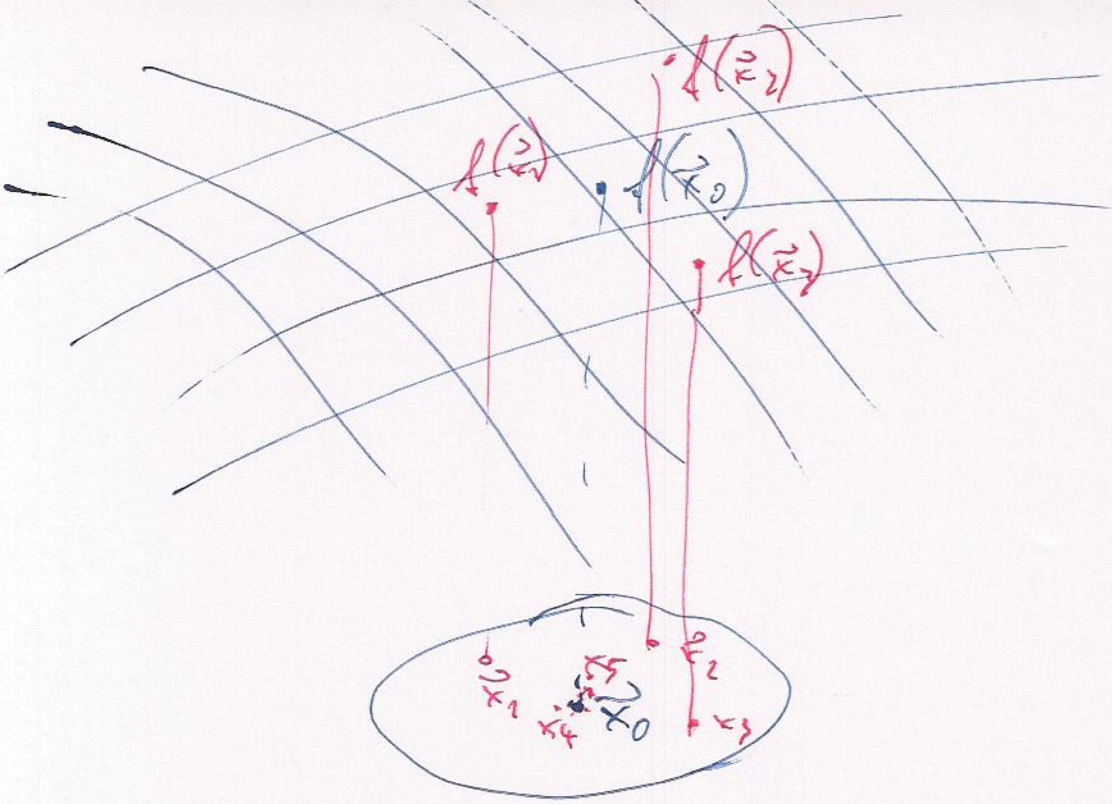
Folge $(x_n)_n$

$= (x_1, x_2, x_3, \dots)$

$x_n \to x_0$

betr. $\left(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots \right)$

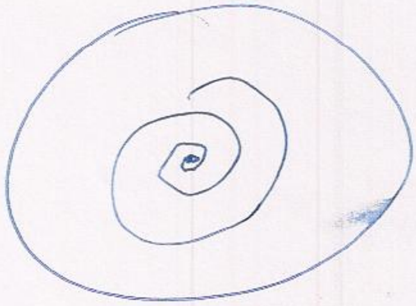
: $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$



für jede Folge: $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots) \to \vec{x}_0$

$\Rightarrow (f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), f(\vec{x}_3), \dots) \to f(\vec{x}_0)$

radiale Annäherung



reicht NICHT um Stetigkeit zu zeigen

Def.: Folge $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvergent** gegen **Grenzwert** $\vec{x} \in D$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) :$$

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon \, , \; \forall n > N$$

Satz: Fkt. $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig an Stelle $\vec{x} \in D$

$$\Updownarrow$$

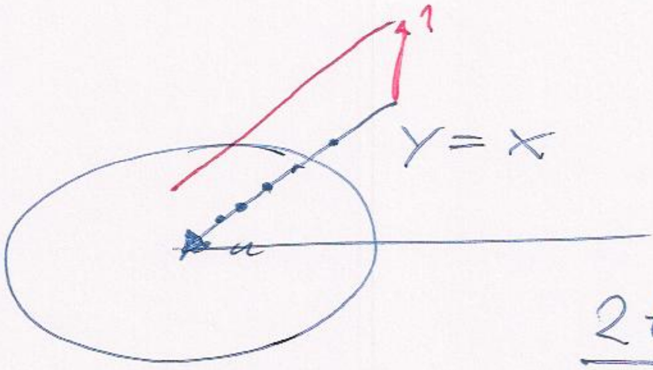
$\lim\limits_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x})$, für jede Folge $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $\vec{x}_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$.

Wichtig: bei "beliebiger Annäherung" muss der Grenzwert mit Funktionswert übereinstimmen

Bsp.: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

NICHT stetig bei $(x,y) = (0,0)$

Läßt sich zeigen!



$x = t$
$y = t$

$$\lim_{t\to 0} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{2t\cdot t}{t^2+t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t^2}{2t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

$x = t$
$y = -t$

$$\lim_{t\to 0} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{2\cdot t\cdot(-t)}{t^2+(-t)^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-2t^2}{2t^2} = \lim_{t\to 0} (-1) = -1$$

Def.: • Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offen** :$\Leftrightarrow$

$\vec{x} \in D \Rightarrow \exists$ Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x})$ mit $U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq D$

• Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen** :$\Leftrightarrow$

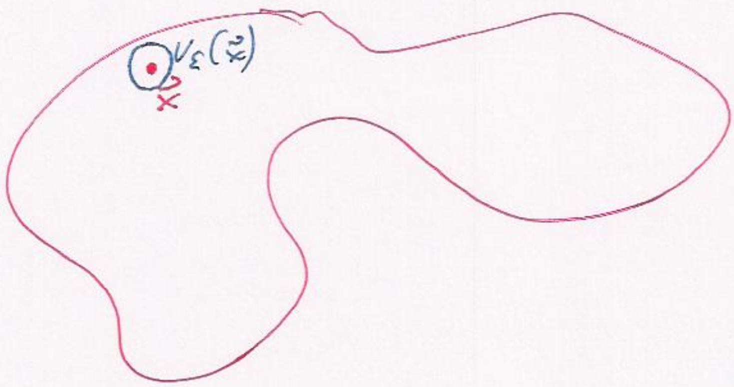
falls $\vec{x} = \lim\limits_{n \to \infty} \vec{x}_n$, mit $\vec{x}_n \in D$, existiert

$\Downarrow$

$\vec{x} \in D$ (Grenzwert liegt selbst in D)

• Menge $D \in \mathbb{R}^n$, die abgeschlossen und beschränkt ist, heißt **kompakt**.

$\vec{x}_n \to \vec{x}$

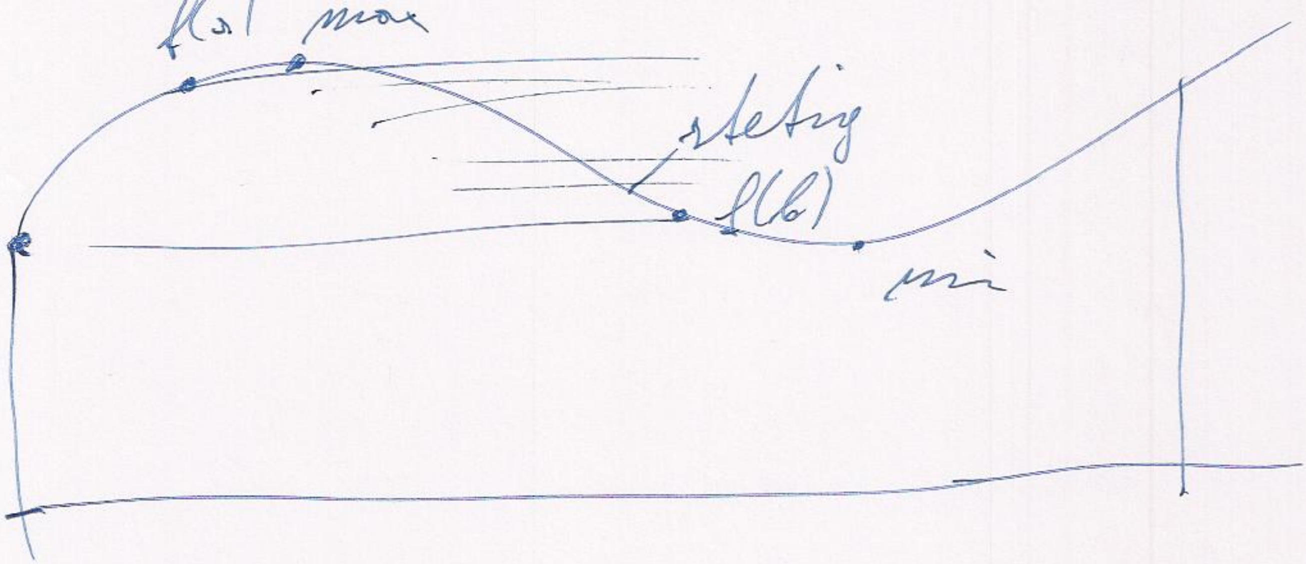


Satz: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Menge.

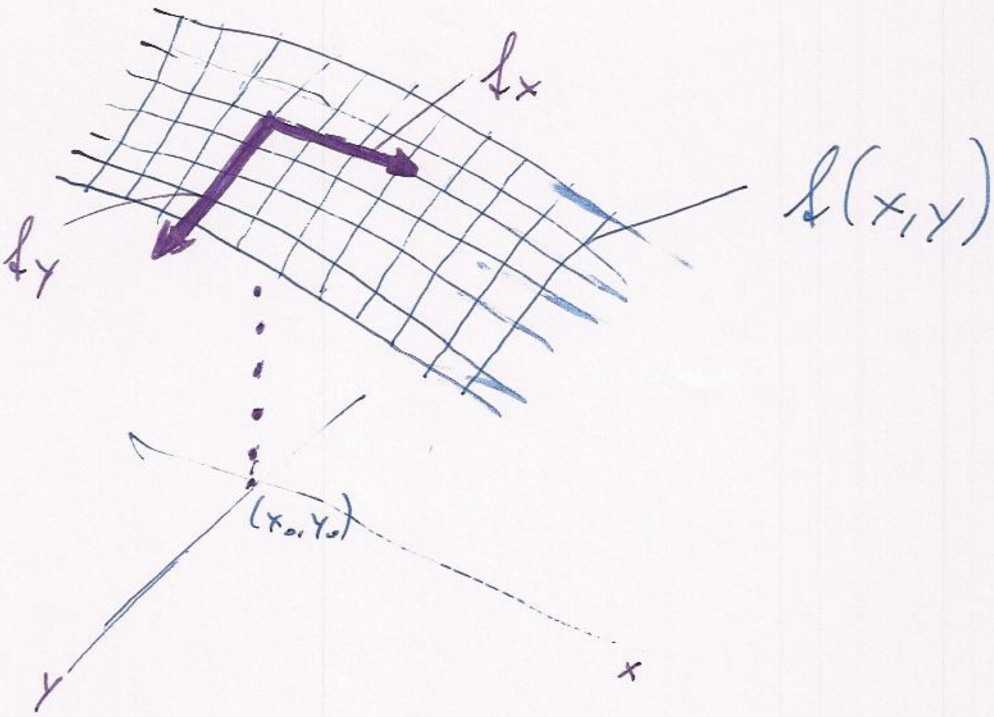
$f: D \to \mathbb{R}$ eine stetige Flt.

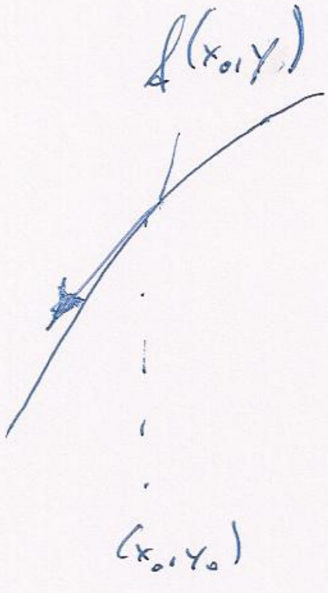
$\Rightarrow$ • f ist auf D beschränkt

• f nimmt auf D ein Maximum und Minimum an.

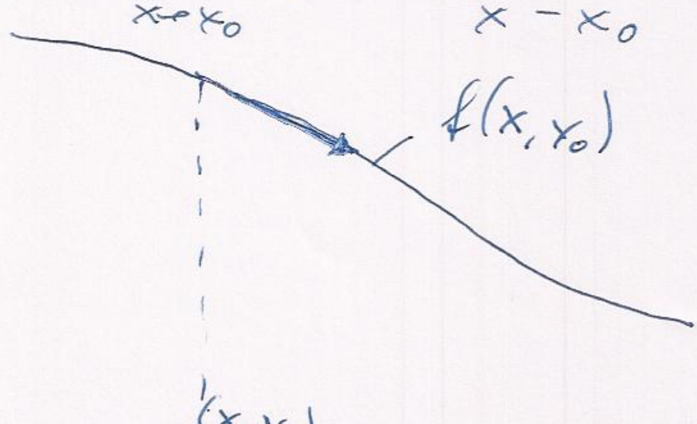


Partielle Ableitungen





$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$



x_0 fest
y variiert
$\Downarrow$
part. Ableitung f_y

y_0 fest
x variiert
$\Downarrow$
part. Ableitung f_x

Def.: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}^2$;
$(x_0, y_0) \in D$.

- f heißt in (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar,

falls Grenzwert

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

existiert.

- f heißt in (x_0, y_0) partiell nach y differenzierbar,

falls Grenzwert

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

existierd.

- $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$: partielle Ableitungen von f (nach x und y)

- f partiell differenzierbar $:\Leftrightarrow$ f_x und f_y existieren

- f stetig partiell differenzierbar
  $:\Leftrightarrow$ • f_x und f_y existieren
  • f_x, f_y stetig

Ableitungen höherer Ordnung:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x$$

$$f_{xy} = (f_x)_y \qquad f_{yy} = (f_y)_y$$

$$f_{yx} = (f_y)_x$$

Bsp.: $f(x,y) = x^2 y + x^2 + y$

$$f_x = 2x \cdot y + 2x$$

$$f_y = x^2 + 1$$

$$f_{xx} = 2y + 2$$

$$f_{xy} = 2x$$

$$f_{yx} = 2x$$

$$f_{yy} = 0$$

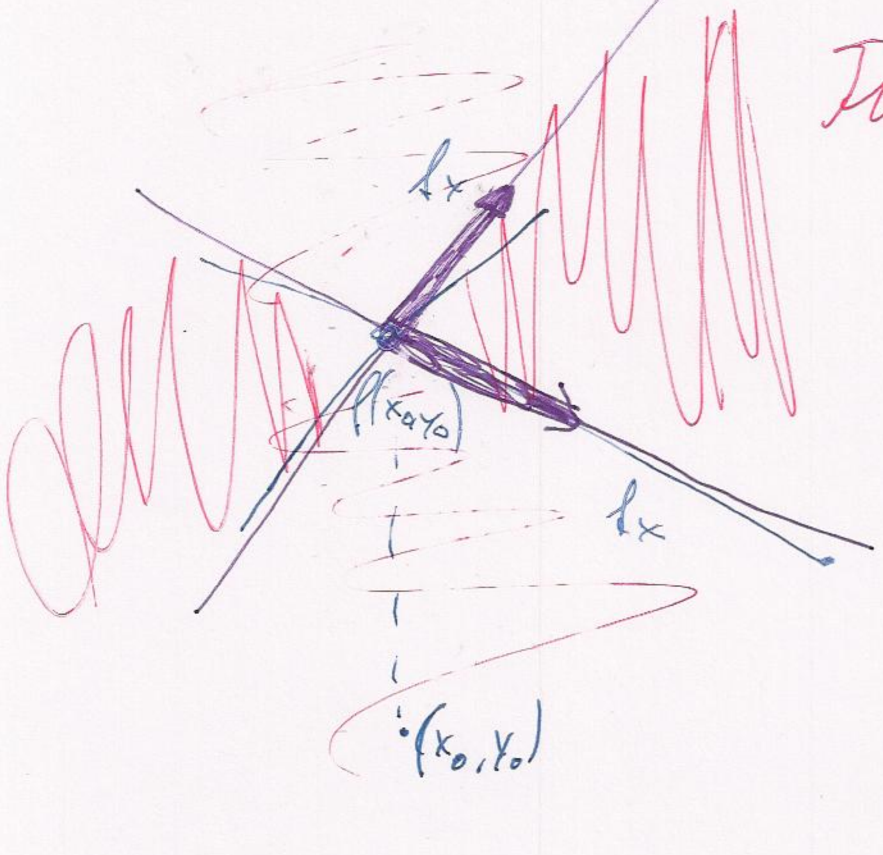
Tangentialebene:

falls existiert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}_{E}}$$

Tangentialeben



Problem: Tangentialebene muß nicht existieren, obwohl partielle Ableitungen existieren!

Bsp.: $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$