Aufgabe 1 (25 %):
Betrachten Sie ein einfaches lineares Maximierungsproblem mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g^1: &\quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ g^2: &\quad 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ g^3: &\quad x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

Im Lösungspunkt lauten die dualen Variablen der Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig)?

a) Der maximale Zielfunktionswert ist 16.

b) Die optimale Lösung lautet $x_1=4$, $x_2=0$.

c) Sei $h(x_1)$ die Isoquante der Zielfunktion, welche durch die Lösung des Problems verläuft. Dann liegt die Steigung dh/dx_1 dieser Isoquante im Intervall [-1,0].

d) Sind bei diesem Problem im Optimum die Schattenpreise aller drei Nebenbedingungen positiv (bei beliebiger linearer Zielfunktion), dann ist die optimale Lösung gleich $x_1=0$, $x_2=0$.

e) Würde man die Nebenbedingung g^2 geringfügig (marginal) ändern:

$$g^2: \quad 2x_1 + x_2 \leq (8 + dp)$$

so hätte das keine Auswirkung auf den Zielfunktionswert.

f) Nehmen Sie nun an, im Optimum wäre der relative Deckungsbeitrag von x_1 (= duale Variable der Variable x_1) negativ.
(Die Schattenpreise der Nebenbedingungen würden dann natürlich nicht die oben gezeigten Werte annehmen.)
Die optimale Lösung wäre in diesem Fall entweder $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ oder $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

ufgabe 1 (25 %):

etrachten Sie ein einfaches lineares Maximierungsproblem mit den Nebenbedi
ngen

$$
\begin{array}{lrcrcl}
g^1: & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
g^2: & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
g^3: & & & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

Lösungspunkt lauten die dualen Variablen der Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{lcl}
\lambda_1 & = & 4 \\
\lambda_2 & = & 0 \\
\lambda_3 & = & 1
\end{array}
$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

) Der maximale Zielfunktionswert ist 16.

) Die optimale Lösung lautet $x_1 = 4$, $x_2 = 0$.

) Sei $h(x_1)$ die Isoquante der Zielfunktion, welche durch die Lösung de lems verläuft. Dann liegt die Steigung dh/dx_1 dieser Isoquante im I $[-1, 0]$.

Sind bei diesem Problem im Optimum die Schattenpreise aller drei N dingungen positiv (bei beliebiger linearer Zielfunktion), dann ist male Lösung gleich $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Würde man die Nebenbedingung g^2 geringfügig (marginal) änder

$$2x_1 + x_2 \leq (8 + dp),$$

so hätte das keine Auswirkung auf den Zielfunktionswert. f

Lösungsversuch von Bbob:

a) Der maximale Zielfunktionswert ist 16.

(Aufgabe a wäre auch, wie in b gezeigt, mittels Kuhn-Tacker lösbar)

Die Lagrange-Funktion des Problems lautet:

$$L = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + \lambda_1 \cdot (5 - x_1 - x_2) + \lambda_2 \cdot (8 - 2x_1 - x_2) + \lambda_3 \cdot (4 - x_2)$$

(Wir wollen maximieren, daher Nebenbedingungen auf ≥ 0 umformen)

Primales-Problem:

$f(x_1, x_2) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \rightarrow max$

g^1: $x_1 + x_2 \leq 5$
g^2: $2x_1 + x_2 \leq 8$
g^3: $x_2 \leq 4$

Duales-Problem:

$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 5 \cdot \lambda_1 + 8 \cdot \lambda_2 + 4 \cdot \lambda_3 \rightarrow min$

g^1: $\lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 \geq a$
g^2: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq b$

Berechnung des Optimums:

$\lambda_1 = 4$
$\lambda_2 = 0$
$\lambda_3 = 1$

$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 5 \cdot \lambda_1 + 8 \cdot \lambda_2 + 4 \cdot \lambda_3$

$f(4, 0, 1) = 5 \cdot 4 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 1$

$f(4, 0, 1) = 24$

Die Aussage ist falsche, da der maximale Zielfunktionswert 24 ist.

-> a) ist falsch

b) Die optimale Lösung lautet $x_1 = 4$, $x_2 = 0$.

Lösung mittels Kuhn-Tucker:

$$f(x_1, x_2) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \to max$$

$$\begin{aligned} g^1: &\quad x_1 + x_2 \le 5 \\ g^2: &\quad 2x_1 + x_2 \le 8 \\ g^3: &\quad x_2 \le 4 \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion des Problems lautet:

$$L = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + \lambda_1 \cdot (5 - x_1 - x_2) + \lambda_2 \cdot (8 - 2x_1 - x_2) + \lambda_3 \cdot (4 - x_2)$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda_1} = L_{\lambda_1} = 5 - x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda_2} = L_{\lambda_2} = 8 - 2x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda_3} = L_{\lambda_3} = 4 - x_2$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_1} = L_{x_1} = a - \lambda_1 - 2\lambda_2$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_2} = L_{x_2} = b - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$$

B	**NB**
$\boldsymbol{x_1 = 0}$	$L_{x_1} = 0$
$\boldsymbol{x_2 = 0}$	$L_{x_2} = 0$
$\boldsymbol{L_{\lambda_1} = 0}$	$\lambda_1 = 0$
$\boldsymbol{L_{\lambda_2} = 0}$	$\lambda_2 = 0$
$\boldsymbol{L_{\lambda_3} = 0}$	$\lambda_3 = 0$

Da wir die Werte für die Lambdas wissen, können wir unsere suche einschränken.

Da λ_1 und λ_3 ungleich 0 -> bindend
Da λ_2 gleich 0 -> Nicht bindend

Versuch 1: NB – NB – B – NB – B

Gleichungssystem lösen:

$$a - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$
$$b - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$
$$5 - x_1 - x_2 = 0$$
$$\lambda_2 = 0$$
$$4 - x_2 = 0$$

Da wir die Lambda-Werte wissen, können diese auch eingesetzt werden.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 4$$
$$a = 4$$
$$b = 5$$

Jetzt müssen alle Kuhn-Tucker-Bedingungen geprüft werden:

$L_{\lambda_1} \cdot \lambda_1 = 0$	$\lambda_1 \geq 0$	$L_{\lambda_1} \geq 0$
$L_{\lambda_2} \cdot \lambda_2 = 0$	$\lambda_2 \geq 0$	$L_{\lambda_2} \geq 0$
$L_{\lambda_3} \cdot \lambda_3 = 0$	$\lambda_3 \geq 0$	$L_{\lambda_3} \geq 0$
$L_{x_1} \cdot x_1 = 0$	$x_1 \geq 0$	$L_{x_1} \leq 0$
$L_{x_2} \cdot x_2 = 0$	$x_2 \geq 0$	$L_{x_2} \leq 0$

Da alle Bedingungen erfüllt sind, ist das Ergebnis gültig.

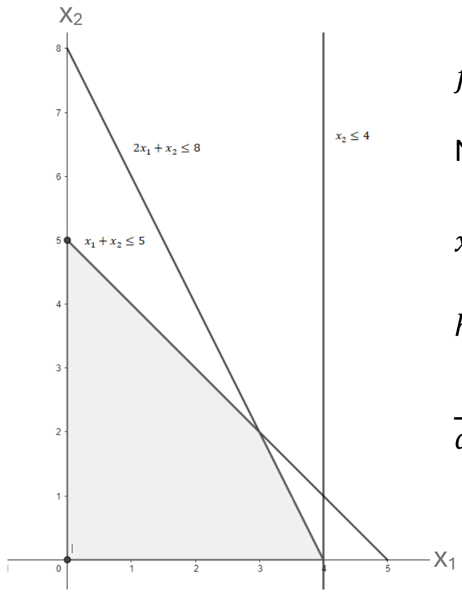
$$f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

Die optimale Lösung ist $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

-> b) ist falsch

c) Sei $h(x_1)$ die Isoquante der Zielfunktion, welche durch die Lösung des Problems verläuft. Dann liegt die Steigung *dh/dx_1* dieser Isoquante im Intervall [-1,0].

Berechnung der Isoquante:



$$f(x_1, x_2) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2$$

Nach x_2 umformen:

$$x_2 = \frac{y}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_1$$

$$h(x_1) = \frac{y}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_1$$

$$\frac{dh}{dx_1} = -\frac{a}{b}$$

In der letzten Aufgabe wurde a und b berechnet wodurch die Steigung $-\frac{4}{5}$ und liegt damit im angegebenen Intervall.

-> c) ist richtig

d) Sind bei diesem Problem im Optimum die Schattenpreise aller drei Nebenbedingungen positiv (bei beliebiger linearer Zielfunktion), dann ist die optimale Lösung gleich $x_1=0$, $x_2=0$.

Kann wieder mit Kuhn-Tacker gelöst werden. Da wir wissen, dass die Schattenpreise positiv sind, müssen die Nebenbedingungen bindend sein.

B	NB
$\boldsymbol{x_1 = 0}$	$L_{x_1} = 0$
$\boldsymbol{x_2 = 0}$	$L_{x_2} = 0$
$\boldsymbol{L_{\lambda_1} = 0}$	$\lambda_1 = 0$
$\boldsymbol{L_{\lambda_2} = 0}$	$\lambda_2 = 0$
$\boldsymbol{L_{\lambda_3} = 0}$	$\lambda_3 = 0$

Durch die zweite Nebenbedingung ergibt sich, dass immer $x_2 = 4$ gilt.

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = L_{\lambda_3} = 4 - x_2$$

-> d) ist falsch

e) Würde man die Nebenbedingung g^2 geringfügig (marginal) ändern:

$$\boldsymbol{g^2}: \qquad \boldsymbol{2x_1 + x_2 \leq (8 + dp)}$$

so hätte das keine Auswirkung auf den Zielfunktionswert.

Stimmt, da $\lambda_2 = 0$ ist.

-> e) ist richtig