Beispiel 471 (MA1 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 4, 05.04.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 03/2006

1 Angabe

Man berechne:

$$\int \frac{x^2+3}{2\cdot x^2+7}\,dx$$

2 Theoretische Grundlagen - Polynomdivision

Wir haben einen Trm in der Form $\frac{Ax^2+b}{cBx^2+d}$ vor uns. Wir wollen ihn mit der **Polynomdivision** so umformen, dass sich $k+\frac{l}{cBx^2+d}$ ergibt.
Die Polynomdivision, auch Partialdivision genannt, ist ein mathematisches Verfahren zur Lösung der Gleichung

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x)$$

bei gegebenen Polynomen p und q über einem Polynomring, also der Bestimmung der Polynome s und r. Die Situation ist analog zur Division mit Rest bei ganzen Zahlen.

3 Lösung des Beispiels

Wir führen also die Berechnung durch und erhalten (für Details siehe http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/polynomdivision.htm):

$$(x^2+3):(2\cdot x^2+7) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\cdot x^2+14} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+3.5}$$

Somit haben wir folgende Integration durchzuführen:

$$\int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{x^2+3.5}\,dx$$

`Meybergs/Vachenauers` 'Höhere Mathematik 1' (2. Aufl., Springer, 1993) gibt auf S.181 die folgende Formel an:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c\int\frac{ax+b}{x^2+px+q} \qquad \forall\, p^2-4q<0$$

Wir 'kennen' diese Formel jedoch nicht, aber wir halten uns folgende Grundintegrale vor Augen:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} + c$$
$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \arctan \ln \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

Wir führen nun die Integration aus:

$$\int \frac{1}{2}\, dx - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{x^2+3.5}\, dx$$
$$0.5 \cdot x + \frac{1}{4\sqrt{3.5}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{3,5}} + c$$

Wäre im Nenner eine 'komplette' quadratische Gleichung gestanden, hätten wir diese wie folgt umformen müssen, um die eines der o.g. Grundintegrale zu erhalten:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) =$$
$$a \cdot (x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2) = a((x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}))$$