1. (6 Punkte) Überprüfen Sie, ohne Nutzung von Determinanten, die folgende Menge auf lineare Unabhängigkeit:

$$\{(1,1,2),(2,1,3),(2,0,3)\}$$

2. Sei $M := \{a + \sqrt{2} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$.
   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass 0 und 1 in M liegen.
   (b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass M bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.
   (c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass jedes $a + \sqrt{2}b \in M \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses in M besitzt. Hinweis:
   $$\frac{1}{a+\sqrt{2}b} = \frac{a-\sqrt{2}b}{(a+\sqrt{2}b)(a-\sqrt{2}b)}$$
   (d) (1 Punkt) Folgern Sie, dass M mit der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ einen Körper bildet. Hinweis: Verwenden Sie, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist, sowie die Ergebnisse aus (a)-(c).

3. Sei $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 = x_2\}$.
   (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.
   (b) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Basis von U und bestimmen Sie die Dimension von U.
   (c) (2 Punkte) Nur, wenn Sie Teil b) nicht lösen konnten: Geben Sie die Dimension von U an und plausibilisieren Sie ihre Behauptung.