BwOpt

Raimund Rittnauer (1201230)

20 Juni 2017

Irgendwas

Binom

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Regel von Sarrus (Determinante berechnen)

$$H_f = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Extrema

- Alle Hauptminoren positiv
  - KONVEX, pos. definit, Minimum
- Hauptminoren alternieren (beginnend mit < 0)
  - KONKAV, neg. definit, Maximum
- Hauptminoren $\neq 0$, aber nichts von oberen
  - SATTELPUNKT

-> wenn Variabel in Hessematrix, dann LOKAL ansonsten GLOBAL

Portfoliotheorie

Globales Minimum-Varianz-Portfolio

$$w^{gmv} = \frac{1}{\vec{1}^T * \Sigma^{-1} * \vec{1}} * \Sigma^{-1} * \vec{1}$$

Minimum-Varianz

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

$$A = \vec{1}^T * \Sigma^{-1} * \vec{1}$$
$$B = \vec{1}^T * \Sigma^{-1} * \mu$$
$$C = \mu^T * \Sigma^{-1} * \mu$$
$$\frac{C - B * \mu^T}{|M|} * \Sigma^{-1} * \vec{1} + \frac{A * \mu^T - B}{|M|} * \Sigma^{-1} * \mu$$

Veränderung zwischen zwei Portfolios bei insgesamt drei Portfolios

$$\Delta p_1 p_2 = p_2 - p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Optimal div. Portfolio

$$p_1 \wedge p_2$$

$$p = p_2 - \frac{cov(p_2, \Delta p_1 p_2)}{var(\Delta p_1 p_2)} * \Delta p_1 p_2$$

Kovarianz

$$cov(p_1, p_2) = p_1^T * \Sigma * p_2$$

Varianz

$$var(p) = p^T * \Sigma * p$$

Standardabweichung

$$\sigma(p) = \sqrt{var(p)}$$

Korrelation

$$cor(p_1, p_2) = \frac{cov(p_1, p_2)}{\sqrt{var(p_1) * var(p_2)}}$$

Erwartungswert der Rendite

$$\mu^{gmv} = w^{gmv\ T} * \mu$$

Karush-Kuhn-Tucker

Kuhn Tucker Bedingungen: * $\lambda \geq 0$ * $NB \geq 0$ * $Comp.\ Slack = 0$

1. Lagrange aufstellen
2. Partielle Ableitung
3. Aufteilen in KT-Absätze
4. Absätze auf KT-Bedingungen checken

Complementary Slackness

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(\lambda^*, x^*) = x_1 + 20 \geq 0$ (1, Nebenbedingung 1)

$\lambda_1 \geq 0$ (2, Schattenpreis, KKT-Bedingung)

$(x_1 + 20)\lambda_1^* = 0$ (3, Complementary Slackness)

Ungleichung (1) ist die erste Nebenbedingung, Ungleichung (2) ist die Vorzeichenrestriktion für den dazugehörigen Schattenpreis λ_1^*. Die *Complementary Slackness-Bedingung* stellt den Zusammenhang her: Wenn die linke Seite echt größer als 0 ist (d.h. die Nebenbedingung ist nicht bindend), dann muss der dazugehörige Schattenpreis λ_1^* gleich 0 sein, denn ansonsten ist (3) verletzt. Umgekehrt kann der Schattenpreis nur dann ungleich 0 sein, wenn die Nebenbedingung bindend ist.

Das unbeschränkte Problem

Lagrange Funktion ohne Rücksicht auf die Nebenbedingungen ableiten, dann erhält man die optimale Lösung des unbeschränkten Problems.

Lineare Optimierung

- Zielfunktion und alle Nebenbedingungen sind lineare Funktionen
- Zulässiger Wertebereich ist entweder leer oder ein konvexer, n-dimensionaler Polyeder
- Wenn es ein Optimum gibt, ist immer ein Eckpunkt des Polyeders Teil der Lösungsmenge
- Simplex-Algorithmus sucht systematisch die Ecken des Polyeders ab, entlang des Pfades der steilsten Verbesserung der Zielfunktion

Maximierung des Deckungsbeitrags (Seite 196)

Zielfunktion $max f(x_t, x_c) = 90x_t + 60x_c$

Wir wollen maximieren, daher Nebenbedingungen auf ≥ 0 umformen.

g1: $g_1(x_t, x_c) = 320 - x_t \geq 0$ g2: $g_2(x_t, x_c) = 1200 - 2x_t - 4x_c \geq 0$ g3: $g_3(x_t, x_c) = 282 - 0.8x_t - 0.4x_c \geq 0$

```r
# Koeffizienten der Zielfunktion
obj <- c(90, 60)

# Nebenbedingungen
# Raumbeschränkung
# lhs - left hand side (linke Seite der Gleichung)
# rhs - right hand side (rechte Seite der Gleichung)
lhs <- matrix(c(1, 0), nrow = 1)
rhs <- 320
dir <- "<="
# Zeitbeschränkung
lhs <- rbind(lhs, c(2, 4))
rhs <- c(rhs, 1200)
dir <- c(dir, "<=")
# Holzbeschränkung
lhs <- rbind(lhs,c(0.8,0.4))
rhs <- c(rhs,282)
dir <- c(dir,"<=")
```

```r
# Errechne die Lösung
sol <- lp("max",obj,lhs,dir,rhs,compute.sens=T)
```

Der maximale Zielfunktionswert lautet

```r
sol$objval
```

```
## [1] 34200
```

Der optimale Produktionsplan 270 Tische und 165 Sessel

```r
sol$solution
```

```
## [1] 270 165
```

Die dualen Variablen der Nebenbedingungen (Schattenpreise)

```r
# Zuerst die dualen Variablen der Nebenbedingungen (Schattenpreise), dann die der Variablen (rel. Decku
sol$duals
```

```
## [1]   0   5 100   0   0
```

- Die Schattenpreise sagen uns, dass der Tischlermeister eine zusätzliche Arbeitsstunde mit EUR 5 und eine zusätzliche Einheit Holz mit EUR 100 bewertet
- Zusätzlicher Platz hat einen Wert von 0, da die Platzbeschränkung nicht bindend ist
- Die relativen Deckungsbeiträge stellen die marginalen Opportunitätskosten dar, wenn man vom optimalen Plan abweicht (Kosten, welche einem entgehen, wenn man 1 Stück Tisch oder Sessel anders als beim optimalen Produktionsplan produziert)
- Beide Variablen sind strikt positiv, daher sind beide relativen Deckungsbeiträge gleich 0

Minimale interne Bewertung der Restriktionen (= Nebenbedingungen) (Seite 211)

$$320\lambda_1 + 1200\lambda_2 + 282\lambda_3 \rightarrow min$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0.8\lambda_3 \geq 90$$

$$4\lambda_2 + 0.4\lambda_3 \geq 60$$

```r
obj <- c(320,1200,282)
lhs <- matrix(c(1,0,2,4,0.8,0.4),nrow=2)
rhs <- c(90,60)
dir <- c(">=",">=")

sol <- lp("min",obj,lhs,dir,rhs,compute.sens=T)
```

Der minimale, bewertete Ressourcenverbrauch ist

```r
sol$objval
```

```
## [1] 34200
```

Die optimale Ressourcenbewertung ist

```r
sol$solution
```

```
## [1]   0   5 100
```

- Der bewertete Ressourcenverbrauch jedes Produkts muss größer oder gleich dem Deckungsbeitrag sein. Die duale Variable einer Nebenbedingung sagt dann aus um welchen Betrag die Zielfunktion steigt, wenn der Deckungsbeitrag einen (marginalen) EUR steig.

Die dualen Variablen geben an, wie viel freie Ressourcen vorhanden sind (sog. Slack)

```
sol$duals
```

```
## [1] 270 165  50   0   0
```

- Die dualen Variablen der Nebenbedingungen sind die optimalen Produktionsmengen (Tische: 270, Sessel: 165)
- Die dualen Variablen der Variablen geben an, wie viele freie Ressourcen vorhanden sind (Raum: 50, Zeit: 0, Holz: 0). Die Raum-Restriktion hat einen Slack von 50, die beiden anderen sind vollkommen ausgeschöpft

Replikationsprinzip (Seite 261)

- Call Option -> Aktie zu vordefiniertem Preis kaufen
  - Amerkianische Call Option -> Kauf zu jedem Zeitpunkt während Laufzeit möglich
  - Europäische Call Option -> Kauf nur am Ende der Laufzeit

Wir haben zwei Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 1$. Basiswert der Option zum Zeitpunkt $t = 0$ (heute) beträgt $EUR\,100.-$. Zum Zeitpunkt $t = 1$ (Zukunft) kann diese entweder den Wert $EUR\,120$ oder $EUR\,90$ haben.

Eine (Amerikanische) Call Option hat eine Laufzeit bis $t = 1$ und kann um $EUR\,95$ erworben werden.

Alternativ gibt es noch eine risikolose Veranlagung (Sparbuch) mit einer Verzinsung von 5%.

Was ist der Wert der Call Option zu $t = 0$?

Wertverlauf der Aktie

$$S_0 = 100$$

$$S_1 = \begin{cases} S_{1,u} = 120 \\ S_{1,d} = 90 \end{cases}$$

Wertverlauf eines Euros auf dem Sparbuch

$$B_0 = 1$$

$$B_1 = (1 + r) * 1 = 1.05$$

Wertverlauf der Option

$$C_0 = ?$$

$$C_1 = \begin{cases} C_{1,u} = max\{0, 120 - 95\} = 25 \\ C_{1,d} = max\{0, 90 - 95\} = 0 \end{cases}$$

- Bei sofortigem Kauf (Kauf bei $t = 0$) wäre $C_0 = 100 - 95 = 5$.
- Aber eventuell wäre es besser bei $t = 1$ zu kaufen und auch dann nur, wenn der Aktienkurs steigt.

Nun erstellen wir ein Portfolio auf N_a Stücken Aktien und N_b Euros am Sparbuch.

$$u : N_a * S_{1,u} + N_b * (1 + r) = C_{1,u}$$

$$d : N_a * S_{1,d} + N_b * (1 + r) = C_{1,d}$$

Nun Umfromen auf N_a und N_b und einsetzen, dann erhalten wir

$$N_a = 0.8333$$

$$N_b = -71.4286$$

- N_b ist negativ -> man nimmt einen Kredit auf.

Nun können wir für u und d einsetzen und erhalten

$$P_{1,u} = 0.8333 * 120 - 71.4286 * 1.05 = 25$$

$$P_{1,d} = 0.8333 * 90 - 71.4286 * 1.05 = 0$$

- Replikationsargument -> Bildet das Portfolio die Option perfekt nach, dann ist der Wert in $t = 0$ gleich den Kosten für die Bildung des Replikationsportfolios.

Wert des Replikationsportfolios in t = 0

$$P_0 = N_a * S_0 + N_b * B_0 = 0.8333 * 100 - 71.4286 * 1 = 11.9048$$

Wenn man also die Option behaltet und erst im Zeitpunkt $t = 1$ kauft (und dann auch nur, wenn im Zustand u), würde dies einen Wert von $EUR\, 11.9048$ liefern.

Wert der Call Option

$$C_0 = max\{C_{gleichkaufen}, C_{späterkaufen}\} = max\{5, 11.9048\} = 11.9048$$

Wahrscheinlichkeit

Für eine Weiterentwicklung in zukünftige Perioden kann auch die Wahrscheinlichkeit heranziehen.

$$S_0 = \frac{1}{1+r} * (\widetilde{\pi} S_{1,u} + (1 - \widetilde{\pi}) S_{1,d})$$

Bellman - Prinzip

Investitionsproblem

Investition in einen LKW in $t = 1$ oder $t = 2$?

Investitionskosten von $Typ_1 : 160.000.-$. Investitionskosten von $Typ_2 : 100.000.-$.

Bei Investition in $t = 1$ kann folgender Cashflow erwirtschaftet werden:

$$C_1 = \begin{cases} 50.000\ Typ_1 \\ 20.000\ Typ_2 \end{cases}$$

Im Zeitpunkt $t = 2$ steigt, oder fällt die Nachfrage nach Transportleistungen

$$Nachfrage = \begin{cases} steigt,\ Zustand\ u: \ \pi = 50\% \\ fällt,\ Zustand\ d: \ 1 - \pi = 50\% \end{cases}$$

Der Wert eines LKWs in $t = 2$

$$V_{2,u} = \begin{cases} 450.000 \ Typ_1 \\ 250.000 \ Typ_2 \end{cases}, \ V_{2,d} = \begin{cases} 150.000 \ Typ_1 \\ 130.000 \ Typ_2 \end{cases}$$

Der *Diskontsatz ist 10%.*

Der *Netto Barwert* (Cashflow - Investition) soll *maximiert* werden.

Mit der Investition bis t = 2 warten

Zustand u

$$450.000 - 160.000 = 290.000 \ Typ_1$$

$$250.000 - 100.000 = 150.000 \ Typ_2$$

Zustand d

$$150.000 - 160.000 = -10.000 \ Typ_1$$

$$130.000 - 100.000 = 30.000 \ Typ_2$$

- Optimal im Zustand u -> Typ_1
- Optimal im Zustand d -> Typ_2

Der Wert der gesamten Strategie "Warten bis t = 2" wäre dann somit

$$\frac{1}{(1+0.1)} * (0.5 * 290.000 + 0.5 * 30.000) = 145.455$$

Investition in t = 1 in Typ_1

$$50.000 \ (Cashflow) - 160.000 \ (Anschaffung) + \frac{1}{(1+0.1)} * (0.5 * 450.000 + 0.5 * 150.000) = 162.727$$

Investition in t = 1 in Typ_2

$$20.000 \ (Cashflow) - 100.000 \ (Anschaffung) + \frac{1}{(1+0.1)} * (0.5 * 250.000 + 0.5 * 130.000) = 92.727$$

Es wäre also optimal sofort ($t = 1$) in Typ_1 zu investieren. Der Wert dieser Investitionsstrategie wäre

$$V_1 = 162.727$$

Remember, remember

$$S_0 = \frac{1}{1+r} * (\widetilde{\pi} S_{1,u} + (1 - \widetilde{\pi}) S_{1,d})$$

Minimierungsproblem mit Bellman (Seite 233)

Zu Beginn des Monats Juli sind die Lager einer Eiswaffelfabrik leer. Für die Monate Juli, August, September ist ein Absatz von je 5000 Kartons Eiswaffeln prognostiziert. Die Kostenfunktion für x Kartons Eiswaffeln in einem Monat ist

$$K(x) = \begin{cases} EUR\ 0\ (bei\ x = 0) \\ EUR\ 3000 + 0.5x\ (bei\ x > 0) \end{cases}$$

Zu Beginn jedes der Monate Juli, August und September kann die Fabrik entscheiden, entweder 0, 5000, 10000 oder 15000 Karton zu erzeugen. Für die Lagerung eines Kartons muss ein Betrag von EUR 0.5 pro Monat aufgewendet werden (Berechnung nach Monatsendbestand). Am Ende der Eissaison (Ende September) ist ein eventuell vorhandener Lagerbestand wertlos. Ermitteln Sie die kostenminimale Produktions- / Lagerentscheidung mit Hilfe des Bellman Prinzips (keine Diskontierung). Wie hoch sind die minimalen Kosten?

Die Kostenfunktion

$$K(0) = 0$$

$$K(5000) = 5500$$

$$K(10000) = 8000$$

$$K(15000) = 10500$$

September

Im September ist das Lager entweder leer, oder 5000 vom Vormonat sind drin, mehr kann nicht drin sein, da Ende des Monats die Saison vorbei ist.

$$s = \{0, 5000\}$$

Produziert werden können eigentlich nur 0 oder 5000 Stück.

$$a = \{0, 5000\}$$

s↓ a→	0	5000	$V_3(s_3)$	$g_3(s_3)$
0		$K(5000) = 5500$	5500 (Minimum)	(bei) 5000
5000	$K(0) = 0$	$K(5000) = 5500$	0 (Minimum)	(bei) 0

- bei s = 0 ist das Minimum 5500 und zwar, wenn man 5000 Stück produziert
- bei s = 5000 ist das Minimum 0 und zwar, wenn man 0 Stück produziert

August

Im Lager können maximal 10000 Kartons liegen, da 5000 im August abgesetzt werden und da für den September entweder 0 oder 5000 Stück aufgehoben werden.

$$s = \{0, 5000, 10000\}$$

Produziert werden entweder 0 (noch was im Lager vom Juli), 5000 (nur für den August) oder 10000 (für den August und September).

$$a = \{0, 5000, 10000\}$$

s↓ a→	0	5000	10000	$V_3(s_3)$	$g_3(s_3)$
0		$K(5000) + V_3(0) = 11000$	$K(10000)+V_3(5000)+2500 = 10500$	10500	10000
5000	$K(0) + V_3(0) = 5500$	$K(5000)+V_3(5000)+2500 = 8000$	nope, da dann im Sep 10k im Lager	5500	0
10000	$K(0) + V_3(5000) + 2500 = 2500$	nope	nope	2500	0

- Bei s = 0 und a = 5000 rechne ich die Kosten für die Produktion von 5000 Stück + den Kosten, welche anfallen, wenn ich im September (V_3) 0 Stück im Lager habe (= 5500)

Juli

Lager ist im Juli mal fix leer

$$s = \{0\}$$

Produziert werden entweder 5000 (nur Juli), 10000 (Juli und August) oder 15000 (alle drei Monate).

$$a = \{5000, 10000, 15000\}$$

s↓ a→	5000	10000	15000	$V_3(s_3)$	$g_3(s_3)$
0	$K(5000) + V_2(0) = 16000$	$K(10000) + V_2(5000) + 2500 = 16000$	$K(15000) + V_2(10000) + 5000 = 18000$	16000	5000 oder 10000

- Das Minimum von 16000 liegt bei entweder 5000 oder 10000

Optimaler Produtionsweg

- 5000 -> 10000 -> 0
  - Juli 5000, August entweder 5000 oder 10000 - ich nehme 10000, da 10000 günstiger ist, September brauch ich keine mehr
- 10000 -> 0 -> 5000
  - Juli 10000, August entweder 5000 oder 0 und dafür im September 5000 - ich nehme 0, da 5000 im September (kostet 5500) günstiger sind als 5000 im August (kostet 8000, da auch Lagerkosten), September 5000