1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung SS2023

Marion Scholz, Gernot Salzer

16. Mai 2023

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Schlussfolgerungen die zugrundeliegende Inferenzregel an und stellen Sie fest, ob diese gültig ist. Wenn ja, geben Sie unter Verwendung von Alltagsbegriffen eine weitere Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt. Wenn nein, geben Sie ein (weiteres) Gegenbeispiel an, das heißt, geben Sie eine Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt und bei der die Prämissen wahr, die Schlussfolgerung aber falsch ist.

(a) Siehe Abbildung.

(b) Kein Wurm hüpft. Der Flummi hüpft. Also ist der Flummi kein Wurm.

(c) Murks ist ein Klacks. Murks mifft. Alle Klackse miffen.

Lösung

(a)
$$\begin{array}{l}\text{Alle Menschen sind gleich.}\\ \text{Sokrates ist ein Mensch.}\\ \hline \text{Sokrates ist gleich.}\end{array} \qquad \text{Inferenzregel: } \begin{array}{l}\text{Alle } x \text{ haben die Eigenschaft } y.\\ z \text{ ist ein } x.\\ \hline z \text{ hat die Eigenschaft } y.\end{array}$$

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

$$\begin{array}{l}\text{Alle Fische können schwimmen.}\\ \text{Der Dorsch ist ein Fisch.}\\ \hline \text{Der Dorsch kann schwimmen.}\end{array}$$

(b) Kein Wurm hüpft.
Der Flummi hüpft.
Also ist der Flummi kein Wurm.

Inferenzregel: Es gibt kein x mit der Eigenschaft y.
z hat die Eigenschaft y.
z ist kein x.

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

Kein Stein kann schwimmen.
Der Fisch kann schwimmen.
Der Fisch ist kein Stein.

(c) Auch ohne die Bedeutung der Worte „Murks“, „Klacks“ oder „miffen“ zu kennen, lässt sich die Inferenzregel und ihre Gültigkeit analysieren.

Murks ist ein Klacks.
Murks mifft.
Alle Klackse miffen.

Inferenzregel: x ist ein y.
x hat die Eigenschaft z.
Alle y haben die Eigenschaft z.

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Ein Gegenbeispiel ist etwa:

Das Pferd ist ein Tier.
Das Pferd wiehert.
Alle Tiere wiehern.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Analysieren Sie den folgenden Text und identifizieren Sie die logische Struktur jedes Satzes sowie seine Elementaraussagen. Betrachten Sie dabei die Sätze unabhängig voneinander.

> Verhalten im Brandfall:
> Wenn der Alarm ertönt, verlassen Sie zügig das Gebäude, aber benutzen Sie nicht die Aufzüge. Wenn sich noch Personen im Gebäude befinden, melden Sie das dem Einsatzleiter. Falls Sie im Aufzug stecken bleiben, bewahren Sie Ruhe und warten Sie auf Hilfe. Bleiben Sie ruhig und folgen Sie den Anweisungen der Feuerwehr. Nur wenn der Einsatzleiter das Gebäude freigegeben hat, dürfen Sie das Gebäude wieder betreten.
> Danke für Ihre Verständnis.

Lösung

(a) *Verhalten im Brandfall:* Hierbei handelt es sich um keine Aussage, da die Wortfolge weder wahr noch falsch sein kann.

(b) *Wenn der Alarm ertönt, verlassen Sie zügig das Gebäude, aber benutzen Sie nicht die Aufzüge.*

A ... Der Alarm ertönt.
B ... Sie verlassen zügig das Gebäude.
C ... Sie benutzen die Aufzüge.

Struktur: Wenn A, dann B und nicht C.
Formel: $A \supset (B \wedge \neg C)$

(c) *Wenn sich noch Personen im Gebäude befinden, melden Sie das dem Einsatzleiter.*

A ... Es befinden sich noch Personen im Gebäude.
B ... Sie melden es dem Einsatzleiter.

Struktur: Wenn A, dann B.
Formel: $A \supset B$

(d) *Falls Sie im Aufzug stecken bleiben, bewahren Sie Ruhe und warten Sie auf Hilfe.*

A ... Sie bleiben im Aufzug stecken.
B ... Sie bewahren Ruhe.
C ... Sie warten auf Hilfe.

Struktur: Wenn A, dann B und C.
Formel: $A \supset (B \wedge C)$

(e) *Bleiben Sie ruhig und folgen Sie den Anweisungen der Feuerwehr.*

A ... Sie bleiben ruhig.
B ... Sie folgen den Anweisungen der Feuerwehr.

Struktur: A und B
Formel: $A \wedge B$

(f) *Nur wenn der Einsatzleiter das Gebäude freigegeben hat, dürfen Sie das Gebäude wieder betreten.*

A ... Der Einsatzleiter hat das Gebäude freigegeben.
B ... Sie dürfen das Gebäude wieder betreten.

Struktur: Nur wenn A, dann B. (Äquivalent: Wenn B, dann A.)
Formel: $A \subset B$ oder $B \supset A$

Alternative:
Struktur: A genau dann, wenn B.
Formel: $A \equiv B$ oder $B \equiv A$

Der Unterschied zwischen den beiden Formalisierungen besteht darin, dass im ersten Fall das Betreten-Dürfen noch von weiteren Bedingungen abhängen kann, etwa dass auch die Spurenermittlung ihr OK gibt. Streng genommen legt der Satz die Erlaubnis des Einsatzleiters nur als notwendige Bedingung fest, es muss nicht die einzige sein. Da es sich um Notfallanweisungen handelt, würde man aber erwarten, dass etwaige weitere Bedingungen dabei stehen würden. Aus dieser Sicht heraus ist auch die zweite Variante zulässig.

(g) *Danke für Ihre Verständnis:* Hierbei handelt es sich um keine Aussage, da diese Wortfolge weder wahr noch falsch sein kann.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sohan plant eine kleine Geburtstagsparty und überlegt, wen seiner Freunde Niels, Adam und Flo er einladen soll. Wie können die folgenden Sätze mit aussagenlogischen Formeln formalisiert werden?

(a) Sohan lädt Flo ein.

(b) Sohan lädt nur Adam ein.

(c) Sohan lädt mindestens einen Freund ein.

(d) Sohan lädt genau zwei Freunde ein.

(e) Sohan lädt Adam nur dann ein, wenn er auch Flo einlädt.

(f) Wenn Sohan Adam nicht einlädt, dann lädt er Flo ein.

(g) Sohan lädt entweder Niels oder Adam ein, aber nicht beide.

(h) Sohan lädt Flo und Adam nicht gemeinsam ein.

(i) Sohan lädt höchstens zwei Freunde ein.

Lösung

N ... Sohan lädt Niels ein.
A ... Sohan lädt Adam ein.
F ... Sohan lädt Flo ein.

(a) F

(b) $A \wedge \neg N \wedge \neg F$

(c) $A \vee N \vee F$

(d) $(A \wedge N \wedge \neg F) \vee (A \wedge \neg N \wedge F) \vee (\neg A \wedge N \wedge F)$

(e) $A \supset F$ oder $F \subset A$

(f) $\neg A \supset F$

(g) $N \not\equiv A$

(h) $\neg(F \wedge A)$

(i) $\neg N \vee \neg A \vee \neg F$

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Sei F die Formel $(((A \wedge C) \vee (B \supset (A \wedge C))) \equiv (B \supset (C \wedge \neg A)))$.

(a) Zeigen Sie, dass F syntaktisch korrekt ist.

(b) Berechnen Sie schrittweise $\mathsf{val}_I(F)$ für $I(A) = 1$, $I(B) = 0$ und $I(C) = 1$.

(c) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel F gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

Lösung

(a) Laut Vorlesung ist die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln die kleinste Menge, für die gilt:

- (a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$
- (a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$
- (a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.
- (a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

wobei $\mathcal{V} = \{A, B, C, \dots\}$ die Menge der aussagenlogischen Variablen ist.

Wir zeigen, dass $(((A \wedge C) \vee (B \supset (A \wedge C))) \equiv (B \supset (C \wedge \neg A)))$ eine aussagenlogische Formel gemäß dieser Definition ist.

(1) Die Variablen A, B und C sind Formeln (a1).

(2) Da A und C Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(A \wedge C)$ eine Formel (a4).

(3) Da B und $(A \wedge C)$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 2), ist auch $(B \supset (A \wedge C))$ eine Formel (a4).

(4) Da $(A \wedge C)$ und $(B \supset (A \wedge C))$ Formeln sind (Punkt 2 bzw. 4), ist auch $((A \wedge C) \vee (B \supset (A \wedge C)))$ eine Formel (a4).

(5) Da A eine Formel ist (Punkt 1), ist auch $\neg A$ eine Formel (a3).

(6) Da C und $\neg A$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 5), ist auch $(C \wedge \neg A)$ eine Formel (a4).

(7) Da B und $(C \wedge \neg A)$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 6), ist auch $(B \supset (C \wedge \neg A))$ eine Formel (a4).

(8) Da $((A \wedge C) \vee (B \supset (A \wedge C)))$ und $(B \supset (C \wedge \neg A))$ Formeln sind (Punkt 4 bzw. 7), ist auch $(((A \wedge C) \vee (B \supset (A \wedge C))) \equiv (B \supset (C \wedge \neg A)))$ eine Formel (a4).

Dieselbe Argumentation in Form eines Baumes:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\in\mathcal{V}}{A\in\mathcal{A}}\,a1\quad\dfrac{B\in\mathcal{V}}{B\in\mathcal{A}}\,a1}{(A\wedge C)\in\mathcal{A}}\,a4\quad\dfrac{\dfrac{B\in\mathcal{V}}{B\in\mathcal{A}}\,a1\quad\dfrac{\dfrac{A\in\mathcal{V}}{A\in\mathcal{A}}\,a1\quad\dfrac{C\in\mathcal{V}}{C\in\mathcal{A}}\,a1}{(A\wedge C)\in\mathcal{A}}\,a4}{(B\supset(A\wedge C))\in\mathcal{A}}\,a4}{((A\wedge C)\vee(B\supset(A\wedge C)))\in\mathcal{A}}\,a4\quad\dfrac{\dfrac{B\in\mathcal{V}}{B\in\mathcal{A}}\,a1\quad\dfrac{\dfrac{C\in\mathcal{V}}{C\in\mathcal{A}}\,a1\quad\dfrac{\dfrac{A\in\mathcal{V}}{A\in\mathcal{A}}\,a1}{\neg A\in\mathcal{A}}\,a3}{(C\wedge\neg A)\in\mathcal{A}}\,a4}{(B\supset(C\wedge\neg A))\in\mathcal{A}}\,a4}{(((A\wedge C)\vee(B\supset(A\wedge C)))\equiv(B\supset(C\wedge\neg A)))\in\mathcal{A}}\,a4$$

Die horizontalen Linien sind als wenn-dann zu lesen, wobei die Prämissen des Schlusses oberhalb und die Konklusion unterhalb der Linie angegeben werden. Neben dem Strich steht die angewendete Regel.

(b) $\mathsf{val}_I\,(((A\wedge C)\vee(B\supset(A\wedge C)))\equiv(B\supset(C\wedge\neg A)))$

$= \mathsf{val}_I\,((A\wedge C)\vee(B\supset(A\wedge C)))\ \mathsf{iff}\ \mathsf{val}_I\,(B\supset(C\wedge\neg A))$

$= (\mathsf{val}_I(A\wedge C)\ \mathsf{or}\ \mathsf{val}_I(B\supset(A\wedge C)))\ \mathsf{iff}\ (\mathsf{val}_I(B)\ \mathsf{implies}\ \mathsf{val}_I(C\wedge\neg A))$

$= ((\mathsf{val}_I(A)\ \mathsf{and}\ \mathsf{val}_I(C))\ \mathsf{or}\ (\mathsf{val}_I(B)\ \mathsf{implies}\ \mathsf{val}_I(A\wedge C)))\ \mathsf{iff}\ (0\ \mathsf{implies}\ (\mathsf{val}_I(C)\ \mathsf{and}\ \mathsf{val}_I(\neg A)))$

$= ((1\ \mathsf{and}\ 1)\ \mathsf{or}\ (0\ \mathsf{implies}\ (\mathsf{val}_I(A)\ \mathsf{and}\ \mathsf{val}_I(C))))\ \mathsf{iff}\ (0\ \mathsf{implies}\ (1\ \mathsf{and}\ \mathsf{not}\,\mathsf{val}_I(A)))$

$= (1\ \mathsf{or}\ (0\ \mathsf{implies}\ (1\ \mathsf{and}\ 1)))\ \mathsf{iff}\ (0\ \mathsf{implies}\ (1\ \mathsf{and}\ \mathsf{not}\,1))$

$= (1\ \mathsf{or}\ (0\ \mathsf{implies}\ 1))\ \mathsf{iff}\ (0\ \mathsf{implies}\ (1\ \mathsf{and}\ 0))$

$= (1\ \mathsf{or}\ 1)\ \mathsf{iff}\ (0\ \mathsf{implies}\ 0)$

$= 1\ \mathsf{iff}\ 1$

$= 1$

(c) Wir berechnen den Wert der Formel für alle Interpretationen mittels einer Wahrheitstafel. An dieser lassen sich dann die Eigenschaften der Formel ablesen.

A	B	C	$((A \wedge C)$	$\vee$	$(B \supset$	$(A \wedge C))$	$\equiv$	$(B \supset$	$(C \wedge$	$\neg A))$
0	0	0	0	1	1	0	**1**	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	**1**	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	**1**	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	**0**	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	**1**	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	**1**	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	**0**	0	0	0

Die Formel ist somit erfüllbar und widerlegbar, aber weder gültig noch unerfüllbar.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Formeln $((B\equiv\neg C)\vee\neg B)$ und $\neg(B\wedge C)$ äquivalent sind.

(a) mithilfe einer Wahrheitstafel;

(b) durch algebraische Umformungen.

Lösung

(a) Wahrheitstafel:

B	C	$((B \equiv \neg C) \vee \neg B) = \neg(B \wedge C)$
0	0	0 1 **1** 1 ✓ **1** 0
0	1	1 0 **1** 1 ✓ **1** 0
1	0	1 1 **1** 0 ✓ **1** 0
1	1	0 0 **0** 0 ✓ **0** 1

Da beide Formeln in sämtlichen Wahrheitsbelegungen denselben Wert liefern, sind sie äquivalent.

Tatsächlich ist es gar nicht notwendig, die Wahrheitstabelle vollständig zu befüllen. Wir wissen zum Beispiel, dass $\vee$ den Wert 1 liefert, wenn eines der Argumente den Wert 1 besitzt. Damit ist das Ergebnis der ersten Formel für jene Interpretationen, in denen $\neg B$ den Wert 1 besitzt, bereits mit 1 festgelegt.

B	C	$((B \equiv \neg C) \vee \neg B) = \neg(B \wedge C)$
0	0	**1** 1 ✓ **1** 0
0	1	**1** 1 ✓ **1** 0
1	0	1 1 **1** 0 ✓ **1** 0
1	1	0 0 **0** 0 ✓ **0** 1

(b) Wir vereinfachen beide Formeln. Da wir dabei identische Formeln erhalten, sind die ursprünglichen Formeln äquivalent.

$(B \equiv \neg C) \vee \neg B$	$F \equiv G = (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$
$= (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg\neg C) \vee \neg B$	$\neg\neg F = F$
$= (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C) \vee \neg B$	$(F \wedge G) \vee F = F$
$= (B \wedge \neg C) \vee \neg B$	$(G \wedge H) \vee F = (G \vee F) \wedge (H \vee F)$
$= (B \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg B)$	$F \vee \neg F = \top$
$= \top \wedge (\neg C \vee \neg B)$	$\top \wedge F = F$
$= \neg B \vee \neg C$	

$\neg(B \wedge C)$	$\neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G$
$= \neg B \vee \neg C$	

Aufgabe 6 **(3 Punkte)**

Der Baron wurde umgebracht. Kommissar Clever ist sich sicher, dass der Chauffeur der Mörder ist. Er hat folgende Informationen:
Der Butler oder der Koch oder der Chauffeur hat den Baron umgebracht. Wenn der Koch den Baron umgebracht hat, dann war der Eintopf vergiftet, und wenn der Chauffeur den Baron umgebracht hat, dann war eine Bombe im Auto. Der Eintopf war nicht vergiftet und der Butler hat den Baron nicht umgebracht.
Stimmt die Schlussfolgerung von Kommissar Clever, dass der Chauffeur den Baron umgebracht hat?

Verwenden Sie für Ihre Überlegungen die Aussagenlogik.
Wie sieht die Formel aus, deren Gültigkeit/Nichtgültigkeit zeigen würde, dass die Schlussfolgerung gilt/nicht gilt?

Lösung

Zur aussagenlogischen Modellierung führen wir Variablen mit folgender Bedeutung ein.
B ... Der Butler hat den Baron umgebracht.
K ... Der Koch hat den Baron umgebracht.
C ... Der Chauffeur hat den Baron umgebracht.
E ... Der Eintopf war vergiftet.
A ... Es war eine Bombe im Auto.

Wir übersetzen die Aussagen in logische Formeln:

- $F_1 = B \vee K \vee C$ ... Der Butler oder der Koch oder der Chauffeur hat den Baron umgebracht.
- $F_2 = K \supset E$ ... Wenn der Koch den Baron umgebracht hat, dann war der Eintopf vergiftet.
- $F_3 = C \supset A$ ... Wenn der Chauffeur den Baron umgebracht hat, dann war eine Bombe im Auto.
- $F_4 = \neg E$ ... Der Eintopf war nicht vergiftet.
- $F_5 = \neg B$ ... Der Butler hat den Baron nicht umgebracht.

Daraus wollen wir schließen:

- $F_6 = C$ ... Der Chauffeur hat den Baron umgebracht.

Es geht also darum zu überprüfen, ob die Konsequenzbeziehung

$$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \models F_6$$

gilt. Aufgrund von F_4 und F_5 müssen wir nur jene Zeilen untersuchen, bei denen die beiden Formeln wahr sind.

$I(B)$	$I(K)$	$I(C)$	$I(E)$	$I(A)$	F_1,	F_2,	F_3	$\models_I$	F_6
0	1	1	0	1	1	0	1	✓	1
0	1	1	0	0	1	0	0	✓	1
0	1	0	0	1	1	0	1	✓	0
0	1	0	0	0	1	0	1	✓	0
0	0	1	0	1	1	1	1	✓	1
0	0	1	0	0	1	1	0	✓	1
0	0	0	0	1	0	1	1	✓	0
0	0	0	0	0	0	1	1	✓	0

Man kann also aus den gegebenen Argumenten schließen, dass der Chauffeur den Baron umgebracht hat. Oder anders formuliert: Die Formel C ist eine logische Konsequenz der Prämissen $B \lor K \lor C$, $K \supset E$, $C \supset A$, $\neg E$ und $\neg B$.
Formel zur Konsequenzbeziehung: F_6 ist genau dann eine logische Konsequenz der Formeln F_1 bis F_5, wenn die Formel

$$(F_1 \land F_2 \land F_3 \land F_4 \land F_5) \supset F_6$$

gültig ist.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Sei f folgende dreistellige Funktion.

x	y	z	$f(x,y,z)$	x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1

Stellen Sie f durch eine Formel in

(a) disjunktiver

(b) konjunktiver

Normalform dar.

Lösung

(a) $(A_1 \land A_2 \land \neg A_3) \lor (A_1 \land \neg A_2 \land A_3) \lor (A_1 \land \neg A_2 \land \neg A_3) \lor (\neg A_1 \land \neg A_2 \land \neg A_3)$

(b) $(\neg A_1 \lor \neg A_2 \lor \neg A_3) \land (A_1 \lor \neg A_2 \lor \neg A_3) \land (A_1 \lor \neg A_2 \lor A_3) \land (A_1 \lor A_2 \lor \neg A_3)$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei F die Formel $(A \land (B \supset C)) \lor (\neg A \supset B)$.

(a) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

(b) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

Lösung

(a) DNF mittels algebraischer Methode:

$$\begin{aligned}
&(A \wedge (B \supset C)) \vee (\neg A \supset B) && \scriptstyle F \supset G = \neg F \vee G \\
&= (A \wedge (\neg B \vee C)) \vee (\neg\neg A \vee B) && \scriptstyle \neg\neg F = F \\
&= (A \wedge (\neg B \vee C)) \vee A \vee B && \scriptstyle F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H) \\
&= (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C) \vee A \vee B && \scriptstyle F \vee (F \wedge G) = F \\
&= A \vee B
\end{aligned}$$

(b) Wir erstellen zuerst die Wahrheitstafel.

A	B	C	$(A \wedge (B \supset C))$		$\vee$	$(\neg A \supset B)$	
0	0	0	0	1	**0**	1	0
0	0	1	0	1	**0**	1	0
0	1	0	0	0	**1**	1	1
0	1	1	0	1	**1**	1	1
1	0	0	1	1	**1**	0	1
1	0	1	1	1	**1**	0	1
1	1	0	0	0	**1**	0	1
1	1	1	1	1	**1**	0	1

Aus dieser Tafel lässt sich folgende KNF ablesen:

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Portia, die reiche junge Adelige aus Shakespeares *„Der Kaufmann von Venedig“* hat drei Kästchen; in einem von ihnen ist Portias Bild verborgen. An jedem Kästchen ist ein Schild angebracht, dessen Inschrift wahr oder falsch sein kann. Ein Freier[1] muss herausfinden, in welchem Kästchen sich Portias Bild befindet. Dazu darf er nur ein Kästchen öffnen. Findet er das Bild, darf er Portia ehelichen; anderenfalls musst er zeitlebens ehelos bleiben. Die Inschriften lauten wie folgt:

- Auf Kästchen A steht: „Hier ist das Bild.“
- Auf Kästchen B steht: „Hier ist nicht das Bild.“
- Auf Kästchen C steht: „Das Bild ist in Kästchen B.“

Der Freier erhält den Hinweis, dass eine Inschrift falsch und zwei Inschriften wahr sind. Helfen Sie dem Freier, indem Sie die Hinweise mit Hilfe der Aussagenlogik formalisieren und die Formeln geeignet auswerten. Lässt sich daraus das Kästchen mit dem Bild eindeutig festlegen? Wenn ja, welches ist es?

[1] Altertümlicher Ausdruck für jemanden, der um eine Frau „freit“, d.h., der sie heiraten möchte und sich dafür bei ihr und ihrer Familie bewirbt. Der Begriff wird auch als Umschreibung für den Kunden einer Prostituierten oder eines Prostituierten verwendet; in diesem Fall ist wohl eher keine Heirat angedacht.

Lösung

Wir führen folgende Aussagenvariablen ein.

A ... Das Bild ist in Kästchen A.
B ... Das Bild ist in Kästchen B.
C ... Das Bild ist in Kästchen C.

Nun formalisieren wir die gegebene Informationen:

- Das Bild ist in einem der Kästchen, die anderen sind leer.
  $F_1 = (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

- Die drei Inschriften übersetzen sich in die Formeln A, $\neg B$ un B. Eine der Inschriften ist falsch, die anderen beiden sind wahr.
  $\neg A \wedge \neg B \wedge B$ die erste Inschrift ist falsch
  $A \wedge \neg\neg B \wedge B$ die zweite Inschrift ist falsch
  $A \wedge \neg B \wedge \neg B$ die dritte Inschrift ist falsch
  Die Bedingung ist die Disjunktion dieser drei Formeln.
  $F_2 = (\neg A \wedge \neg B \wedge B) \vee (A \wedge \neg\neg B \wedge B) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg B)$

Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen, die die Konjunktion $F_1 \wedge F_2$ erfüllen. Wir vereinfach zunächst einmal F_2:

$$\begin{aligned}
F_2 &= (\neg A \wedge \neg B \wedge B) \vee (A \wedge \neg\neg B \wedge B) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg B) && \scriptstyle \neg\neg F = F \\
&= (\neg A \wedge \neg B \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge B) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg B) && \scriptstyle F \wedge F = F \\
&= (\neg A \wedge \neg B \wedge B) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) && \scriptstyle F \wedge \neg F = \bot \\
&= (\neg A \wedge \bot) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) && \scriptstyle F \wedge \bot = \bot \\
&= \bot \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) && \scriptstyle F \vee \bot = F \\
&= (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) && \scriptstyle F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H) \\
&= A \wedge (B \vee \neg B) && \scriptstyle F \vee \neg F = \top \\
&= A \wedge \top && \scriptstyle F \wedge \top = F \\
&= A
\end{aligned}$$

Formel F_2 wird daher von allen Wahrheitsbelegungen erfüllt, in denen A wahr ist. Wegen F_1 müssen dann aber B und C falsch sein. Somit kann das Bild nur in Kästchen A sein.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Florian möchte gerne Gemüse anbauen und hat sich eine Selbsterntеparzelle gemietet. Er würde gerne Erbsen, Gurken, Fisolen, Paradeiser und Zwiebeln anpflanzen. Er hat aber nur begrenzt Platz und kann nicht alle diese Sorten anpflanzen. Im Internet liest er außerdem, dass sich einige der Sorten nicht miteinander vertragen. Die ganzen Pflanztipps verwirren ihn, also schreibt er die Informationen zusammen und bittet seine Freundin Lisa um Hilfe, die schon etwas mehr Erfahrung mit Aussagenlogik hat als er.

Erbsen dürfen nicht gemeinsam mit Fisolen angepflanzt werden, dies würde die Ernteerträge erheblich schmälern. Wenn Fisolen angepflanzt werden, sollte von der Pflanzung von Gurken Abstand genommen werden. Nur wenn Zwiebeln gepflanzt werden, sollten auch Paradeiser gepflanzt werden. Zumindest drei Sorten sollten es aufgrund der Artenvielfalt schon sein, mehr als drei machen bei so wenig Platz aber keinen Sinn. Die Pflanzung von Gurken und/oder Erbsen wäre gut, denn das lockt Bienen an und kann sich positiv auf die Gesamtertragsmenge auswirken.

Florian liebt Paradeiser, die möchte er auf jeden Fall anpflanzen. Ansonsten ist er aber unsicher, was er noch pflanzen soll. Zu welchen Gemüsesorten rät ihm Lisa, sodass alle diese Anforderungen eingehalten werden?

(a) Helfen Sie Lisa den Text zu analysieren, indem Sie die beschriebenen Wünsche mit allen Anhaltspunkte durch aussagenlogische Formeln ausdrücken. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Lassen sich Florians Wünsche berücksichtigen? Welche Varianten sind möglich? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

E ... Florian pflanzt Erbsen.
G ... Florian pflanzt Gurken.
F ... Florian pflanzt Fisolen.
P ... Florian pflanzt Paradeiser.
Z ... Florian pflanzt Zwiebeln.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := P$ Paradeiser auf jeden Fall.
$F_1 := (E \wedge G \wedge \neg F \wedge \neg Z) \vee (E \wedge \neg G \wedge F \wedge \neg Z) \vee (E \wedge \neg G \wedge \neg F \wedge Z) \vee$
$(\neg E \wedge G \wedge F \wedge \neg Z) \vee (\neg E \wedge G \wedge \neg F \wedge Z) \vee (\neg E \wedge \neg G \wedge F \wedge Z)$
zwei weitere Sorten
$F_2 := \neg(E \wedge F)$ Erbsen und Fisolen nicht gemeinsam
$F_3 := F \supset \neg G$ wenn Fisolen dann keine Gurken
$F_4 := P \supset Z$ Paradeiser nur wenn Zwiebeln
$F_5 := G \vee E$ Gurken oder Erbsen oder beide

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen P, E, G, F und Z, sodass die Formeln $F_0, \ldots, F_5$ wahr werden. Wegen der Formel F_1 genügt es Belegungen zu betrachten, in denen genau drei Variablen wahr sind; wegen Formel F_0 interessieren nur Belegungen, in denen P wahr ist.

P	E	G	F	Z	$\neg(E \wedge F)$	$F \supset \neg G$	$P \supset Z$	$G \vee E$	
1	1	1	0	0	1	1	0	1	
1	1	0	1	0	0	1	0	1	
1	1	0	0	1	1	1	1	1	✓
1	0	1	1	0	1	0	0	1	
1	0	1	0	1	1	1	1	1	✓
1	0	0	1	1	1	1	1	0	

Florian pflanzt auf jeden Fall Paradeiser und Zwiebeln. Zusätzlich pflanzt er noch Erbsen oder Gurken.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

SAT-Solver sind Programme, die als Eingabe eine Formel in konjunktiver Normalform erwarten und diese auf Erfüllbarkeit testen. Als Ausgabe liefern sie die Information „erfüllbar“ bzw. „unerfüllbar“. Im ersten Fall wird eine erfüllende Variablenbelegung als Nachweis für die Erfüllbarkeit ausgegeben.
Beispiel: Für die konjunktive Normalform $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$ liefern SAT-Solver die Antwort „erfüllbar“ und eine der Variablenbelegungen $I_1(A) = I_1(B) = 1$ oder $I_2(A) = I_2(B) = 0$.

Angenommen Sie und Ihre Kollegin modellieren das gleiche aussagenlogische Problem. Sie können sich zwar über die benötigten Aussagenvariablen und ihre Bedeutung einigen, für die Problembeschreibung benötigen Sie aber zwei Formeln F und G, während Ihre Kollegin mit einer einzigen Formel H auskommt, die ganz anders aussieht als Ihre Formeln.

(a) Wie können Sie mit Hilfe eines SAT-Solvers überprüfen, ob die beiden Beschreibungen gleichwertig (semantisch äquivalent) sind? Beschreiben Sie alle erforderlichen Schritte.

(b) Was bedeutet es, wenn der SAT-Solver eine erfüllende Variablenbelegung findet? Was lässt sich über den Wahrheitswert der ursprünglichen Formeln F, G und H in dieser Variablenbelegung sagen?

Lösung

(a) die Problembeschreibungen F, G und H sind äquivalent

$\iff$ die Formeln $F \wedge G$ und H sind äquivalent

$\iff$ $(F \wedge G) \equiv H$ gültig

$\iff$ $(F \wedge G) \not\equiv H$ unerfüllbar

[$\iff$ $((F \wedge G) \vee H) \wedge (\neg(F \wedge G) \vee \neg H)$ unerfüllbar]

[$\iff$ $(F \vee H) \wedge (G \vee H) \wedge (\neg F \vee \neg G \vee \neg H)$ unerfüllbar]

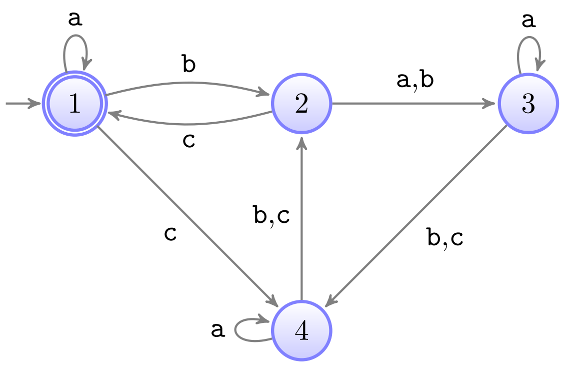
Liefert der SAT-Solver für die letzte Formel die Antwort 'nein, ist nicht erfüllbar', dann sind die beiden ursprünglichen Beschreibungen äquivalent. Liefert der SAT-Solver die Antwort 'ja, ist erfüllbar', dann sind sie nicht äquivalent. (Für manche SAT-Solver muss die eingegebene Formel zuerst in KNF gebracht werden.)

(b) Wenn der SAT-Solver eine erfüllende Variablenbelegung I findet, dann sind die ursprünglichen Beschreibungen nicht äquivalent. I ist ein Gegenbeispiel für die Äquivalenz, d.h., die Formel $(F \wedge G) \equiv H$ ist falsch in I. Das trifft in folgenden Situationen zu.

$\mathsf{val}_I(F)$	$\mathsf{val}_I(G)$	$\mathsf{val}_I(H)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Aufgabe 12 (3 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ der folgende endliche Automat.



(a) Geben Sie alle Wörter an, die aus maximal drei Zeichen bestehen und von $\mathcal{A}$ akzeptiert werden. (Das sollten neun Wörter sein.)

(b) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(1, \texttt{acabc})$.

(c) Spezifizieren Sie $\mathcal{A}$ in tabellarischer Form. Handelt es sich bei $\mathcal{A}$ um einen deterministischen oder indeterministischen Automaten?

Lösung

(a) Die von $\mathcal{A}$ akzeptierten Wörter mit einer Länge von maximal drei Zeichen sind ε, `a`, `aa`, `bc`, `aaa`, `abc`, `bca`, `cbc` und `ccc`.

(b) $\delta^*(1, \texttt{acabc}) = \delta^*(\delta(1, \texttt{a}), \texttt{cabc})$
$= \delta^*(1, \texttt{cabc})$
$= \delta^*(\delta(1, \texttt{c}), \texttt{abc})$
$= \delta^*(4, \texttt{abc})$
$= \delta^*(\delta(4, \texttt{a}), \texttt{bc})$
$= \delta^*(4, \texttt{bc})$
$= \delta^*(\delta(4, \texttt{b}), \texttt{c})$
$= \delta^*(2, \texttt{c})$
$= \delta^*(\delta(2, \texttt{c}), \varepsilon)$
$= \delta^*(1, \varepsilon)$
$= 1$

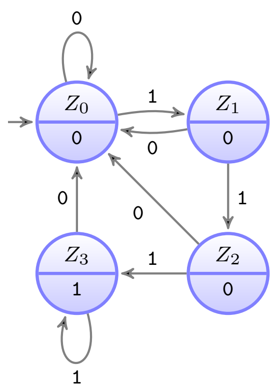
(c) $\mathcal{A} = \langle \{1, 2, 3, 4\},\ \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\},\ \delta,\ 1,\ \{1\} \rangle$, wobei die Übergangsfunktion δ durch folgende Tabelle definiert ist:

δ	a	b	c
1	1	2	4
2	3	3	1
3	3	4	4
4	4	2	2

$\mathcal{A}$ ist ein deterministischer Automat, da der momentane Zustand und die nächste Eingabe immer eindeutig den Folgezustand bestimmen. Das äußert sich in der Tabelle dadurch, dass jeder Eintrag genau einen Zustand enthält.

Aufgabe 13 (3 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ der folgende Moore-Automat.



(a) Geben Sie die Ausgaben zu folgenden Eingaben an: `01010`, `01111`, `11111`.

(b) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(Z_0, \texttt{01110})$ und $\gamma^*(Z_0, \texttt{01110})$.

(c) Beschreiben Sie die Übersetzungsfunktion $[\mathcal{A}]$.

Lösung

(a)

w:	01010	01111	11111
$[\mathcal{A}](w)$:	000000	000011	000111

(b)
$$\begin{aligned}
\delta^*(Z_0, \texttt{01110}) &= \delta^*(\delta(Z_0, \texttt{0}), \texttt{1110}) &&= \delta^*(Z_0, \texttt{1110}) \\
&= \delta^*(\delta(Z_0, \texttt{1}), \texttt{110}) &&= \delta^*(Z_1, \texttt{110}) \\
&= \delta^*(\delta(Z_1, \texttt{1}), \texttt{10}) &&= \delta^*(Z_2, \texttt{10}) \\
&= \delta^*(\delta(Z_2, \texttt{1}), \texttt{0}) &&= \delta^*(Z_3, \texttt{0}) \\
&= \delta^*(\delta(Z_3, \texttt{0}), \varepsilon) &&= \delta^*(Z_0, \varepsilon) \\
&= Z_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^*(Z_0, \texttt{01110}) &= \gamma(Z_0) \cdot \gamma^*(\delta(Z_0, \texttt{0}), \texttt{1110}) &&= \texttt{0} \cdot \gamma^*(Z_0, \texttt{1110}) \\
&= \texttt{0} \cdot \gamma(Z_0) \cdot \gamma^*(\delta(Z_0, \texttt{1}), \texttt{110}) &&= \texttt{00} \cdot \gamma^*(Z_1, \texttt{110}) \\
&= \texttt{00} \cdot \gamma(Z_1) \cdot \gamma^*(\delta(Z_1, \texttt{1}), \texttt{10}) &&= \texttt{000} \cdot \gamma^*(Z_2, \texttt{10}) \\
&= \texttt{000} \cdot \gamma(Z_2) \cdot \gamma^*(\delta(Z_2, \texttt{1}), \texttt{0}) &&= \texttt{0000} \cdot \gamma^*(Z_3, \texttt{0}) \\
&= \texttt{0000} \cdot \gamma(Z_3) \cdot \gamma^*(\delta(Z_3, \texttt{0}), \varepsilon) &&= \texttt{00001} \cdot \gamma^*(Z_0, \varepsilon) \\
&= \texttt{00001} \cdot \gamma(Z_0) &&= \texttt{000010}
\end{aligned}$$

(c) Der Automat erkennt drei oder mehr aufeinanderfolgende `1`er in der Eingabe: Waren die letzten drei Eingabesymbole `1`er eingelesen, so ist die Ausgabe `1`, sonst `0`.

Aufgabe 14 (7 Punkte)

Drei Hobbits und drei Goblins treffen an einem Flussübergang zusammen. Alle wollen über den Fluss, es gibt aber nur ein Floß, das maximal zwei Kreaturen auf einmal transportieren kann. Das Floß kann nicht alleine über den Fluss, es muss von jemandem gesteuert werden.
Die Hobbits und die Goblins sind sich einig, dass alle über den Fluss sollen. Die Hobbits haben aber Vorbehalte: Wenn die Goblins auf einer Flussseite in der Überzahl sind, ärgern sie die Hobbits dort. Die Überquerung des Flusses soll also so erfolgen, dass sich auf keiner Flussseite je weniger Hobbits als Goblins aufhalten.
Modellieren Sie das Problem mit Hilfe eines endlichen Automaten, sodass sich aus diesem alle erlaubten Folgen von Überfahrten, inklusive der möglichen Lösungen, ablesen lassen. Gehen Sie folgendermaßen vor.

(a) Welche Informationen sind erforderlich, um den momentanen Zustand des Systems nach einer beliebigen Zahl von Floßfahrten zu charakterisieren? Wählen Sie eine Notation zur kompakten Beschreibung von Systemzuständen. Geben Sie exemplarisch drei mögliche Zustände in dieser Notation an und erklären Sie, was diese bedeuten.

(b) Geben Sie alle Aktionen an, die zu Zustandsänderungen führen. Wählen Sie eine kompakte Notation dafür und erklären Sie diese.

(c) Geben Sie einen endlichen Automaten in graphischer oder tabellarischer Form an, der das System mit allen zulässigen Überfahrten modelliert. Verwenden Sie dabei die Notationen, die Sie in den beiden ersten Schritten eingeführt haben. Was ist der Startzustand, was sind die Endzustände? Die vom endlichen Automaten akzeptierten Aktionsfolgen sollen genau jenen Folgen von Überfahrten entsprechen, die die Hobbits und Goblins von der einen zur anderen Flussseite bringen.

(d) Geben Sie zwei Wörter an, die Ihr Automat akzeptiert, und erklären Sie, welche Lösungen sich daraus für das ursprüngliche Problem ergeben.

Lösung

(a) Die Systemzustände lassen sich durch die Information beschreiben, auf welcher Flussseite sich jeweils wieviele Hobbits and Goblins befinden und auf welcher Flussseite das Floß momentan liegt. Wir wählen `f`,`g` bzw. `h`, um das Floß, einen Goblin bzw. einen Hobbit zu symbolisieren. Auf einer Flussseite können sich entweder gar keine Hobbits befinden, oder so viele wie es Goblins dort gibt, oder alle drei Hobbits; in den anderen Fällen wären die Hobbits auf einer der beiden Flussseiten in der Unterzahl. Wir geben die Kreaturen auf jeder der beiden Flussseiten, durch einen Schrägstrich getrennt, an. In jeder der Situationen kann sich das Floß auf der einen oder anderen Flussseite befinden. Somit sind maximal die folgenden Zustände möglich; u.U. lassen sich nicht alle dieser Zustände tatsächlich von der beschriebenen Ausgangssituation erreichen.

`fggghhh/`, `fggg/hhh`, `fgghhh/g`, `fgghh/gh`, `fgg/ghhh`, `fghhh/gg`, `fgh/gghh`, `fg/gghhh`, `fhhh/ggg`, `f/ggghhh`,
`ggghhh/f`, `ggg/fhhh`, `gghhh/fg`, `gghh/fgh`, `gg/fghhh`, `ghhh/fgg`, `gh/fgghh`, `g/fgghhh`, `hhh/fggg`, `/fggghhh`

Drei Zustände und ihre Bedeutung:

- `fggghhh/`: Das Floß und alle Kreaturen befinden sich auf der einen Flußseite, niemand auf der anderen.
- `fgh/gghh`: Das Floß, ein Goblin und ein Hobbit befinden sich auf der einen, je zwei Goblins und Hobbits auf der anderen Flußseite.
- `/fggghhh`: Alle, inklusive Floß, befinden sich auf der anderen Flußseite.

Anmerkung: Für die eindeutige Festlegung der Zustände reicht es, eine Flussseite zu beschreiben. Alles andere muss sich zwangsläufig auf der anderen Seite befinden. Somit ließen sich die Zustände auch kürzer schreiben als

`fggghhh`, `fggg`, `fgghhh`, `fgghh`, `fgg`, `fghhh`, `fgh`, `fg`, `fhhh`, `f`,
`ggghhh`, `ggg`, `gghhh`, `gghh`, `gg`, `ghhh`, `gh`, `g`, `hhh`, ε

Alternativ lassen sich die Zustände auch durch zwei Zahlen beschreiben, von denen die erste die Zahl der Goblins und die zweite die Zahl der Hobbits am Ausgangsufer bedeuten. Das Floss könnte durch eine Markierung, etwa ein Vorzeichen, dargestellt werden. Die Zustandsbezeichnungen könnten dann etwa folgendermaßen aussehen:

+33, +30, +23, +22, +20, +13, +11, +03, +00
−33, −30, −23, −22, −20, −13, −11, −03, −00

(b) Der aktuelle Zustand ändert sich dadurch, dass ein oder zwei Kreaturen mit dem Floß den Fluss überqueren. Die Richtung der Überquerung ergibt sich implizit aus der Position der Aktion, da sich die beiden Richtungen immer abwechseln müssen. An den ungeraden Positionen einer Aktionsfolge (eines Wortes) erfolgt die Überfahrt immer von der ersten auf die zweite Seite, an den geraden von der zweiten auf die erste Seite. Die Aktionen sind somit:

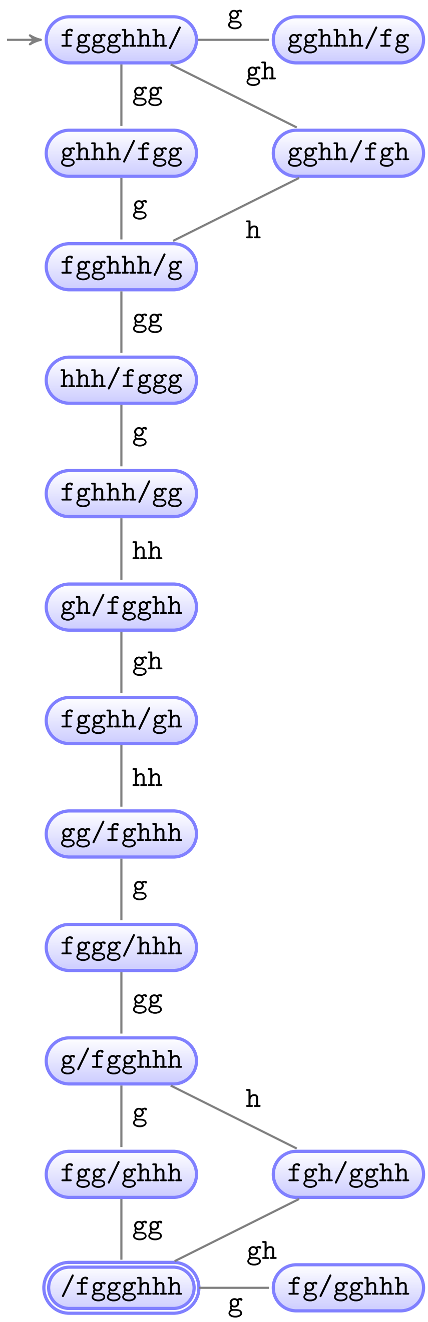
`gg`, `g`, `gh`, `h`, `hh`

(c) Tabellarische Darstellung des Automaten:

		gg	g	gh	h	hh
SZ	fggghhh/	ghhh/fgg	gghhh/fg	gghh/fgh	X	X
	ghhh/fgg	fggghhh/	fgghhh/g	X	X	X
	gghhh/fg	X	fggghhh/	X	X	X
	gghh/fgh	X	X	fggghhh/	fgghhh/g	X
	fgghhh/g	hhh/fggg	ghhh/fgg	X	gghh/fgh	X
	hhh/fggg	fgghhh/g	fghhh/gg	X	X	X
	fghhh/gg	X	hhh/fggg	X	X	gh/fgghh
	gh/fgghh	X	X	fgghh/gh	X	fghhh/gg
	fgghh/gh	X	X	gh/fgghh	X	gg/fghhh
	gg/fghhh	X	fggg/hhh	X	X	fgghh/gh
	fggg/hhh	g/fgghhh	gg/fghhh	X	X	X
	g/fgghhh	fggg/hhh	fgg/ghhh	X	fgh/gghh	X
	fgg/ghhh	/fggghhh	g/fgghhh	X	X	X
	fgh/gghh	X	X	/fggghhh	g/fgghhh	X
EZ	/fggghhh	fgg/ghhh	fg/gghhh	fgh/gghh	X	X
	fg/gghhh	X	/fggghhh	X	X	X
	X	X	X	X	X	X

`X` ist ein Fehlerzustand, aus dem kein Weg zum Endzustand führt.

In der graphischen Darstellung stellen wir der Übersichtlichkeit wegen die Falle `X` nicht explizit dar. Alle nicht dargestellten Übergänge führen nach `X`. Die ungerichteten Kanten stehen für zwei Zustandsübergänge mit dem angegebenen Symbol, in jede Richtung einer. Beispielsweise gelangt man vom Zustand `fggghhh/` mit der Aktion `g` nach `gghhh/fg` und von dort mit derselben Aktion wieder zurück nach `fggghhh/`.



(d) Der Automat akzeptiert u.a. die beiden folgenden Wörter.

- `gg g gg g hh gh hh g gg g gg`

  Dieses Wort beschreibt folgende Lösung der ursprünglichen Aufgabe: Zwei Goblins fahren über den Fluss, einer kommt zurück; wieder fahren zwei Goblins über den Fluss, einer kommt zurück. Nun fahren zwei Hobbits über den Fluss, einer kommt mit einem Goblin wieder zurück. Nochmals fahren zwei Hobbits über den Fluss, diesmal kommt aber ein Goblin alleine zurück. Zu guter Letzt fahren wieder zwei Goblins über den Fluss, einer kommt zurück und bringt auch den letzten Goblin auf die andere Seite.

- `gg g gg g hh gh hh g gg g gg g g`

  Dieses Wort beschreibt dieselbe Lösung wie das vorherige Wort, nur fährt anschließend ein Goblin nochmals zurück ans Ausgangsufer und wieder retour.