2009-06-29 pdf

1. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(x, y) = x^2(3x-3) - y^2(y^2-3) - 9\,.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von $g(x,y)$! (2)

(b) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von $g(x,y)$ und deren Art (Minima, Maxima, Sattelpunkte), jeweils mit Begründung! (4)

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für die Funktion $g(x,y)$ im Punkt (1,1)!! (4)

1) a) $g(x,y) = 3x^3 - 3x^2 - y^4 + 3y^2 - 9$

$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 9x^2 - 6x \\ -4y^3 + 6y \end{pmatrix}$ $\quad \nabla^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 18x-6 & 0 \\ 0 & -12y^2+6 \end{pmatrix}$

b) $3x(3x-2) = 0 \to \underline{x_1 = 0}$, $\underline{\underline{x_2 = 2/3}}$

$2y(-2y^2+3) = 0 \to \underline{y_1 = 0}$

$\underline{y_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}}$

$P(0|0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \to$ nicht definit $\to$ Sattelpunkt

$P(0|\sqrt{\frac{3}{2}}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \to$ neg. def. $\to$ Max.

$P(0|-\sqrt{\frac{3}{2}}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \to$ neg. def. $\to$ Max.

$P(\frac{2}{3}|0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \to$ pos. def. $\to$ Min.

$P(\frac{2}{3}|\sqrt{\frac{3}{2}}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \to$ nicht def. $\to$ S.

$P(\frac{2}{3}|-\sqrt{\frac{3}{2}}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \to$ nicht def. $\to$ S.

c) $3 - 3 - 1 + 3 - 9 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

$= -7 + 3x - 3 + 2y - 2 + \begin{pmatrix} 6x-6 & -3y+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

$= -12 + 3x + 2y + (y-1)(-3y+3) + (x-1)(6x-6)$

$= -12 + 3x + 2y - 3y^2 + 3y + 3y - 3 + 6x^2 - 6x - 6x + 6$

$= \underline{6x^2 - 3y^2 - 9x + 8y - 9}$

2. Gegeben seien die Kurven

$$f : [0, 4\pi) \to \mathbb{R}^2,\ \ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2,\ \ t \mapsto \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$$

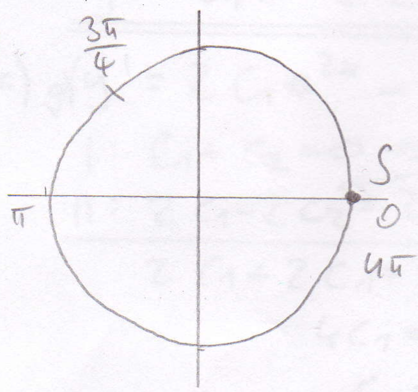
(a) Zeichnen Sie eine Skizze der Funktion f in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und markieren Sie den Startpunkt S der Kurve! (2)

(b) Berechnen Sie die Länge beider Kurven f und g! (3)

(c) Berechnen Sie die den (normierten) Tangentialvektor (Tangenteneinheitsvektor) der Kurve f im Punkt $\frac{3\pi}{4}$ exakt! (2)

(d) Stellen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve f im Punkt $\frac{3\pi}{4}$ in Parameterform auf! (3)

2) a)



b) $\frac{d}{dt} x(t) = -\sin(t)$

$\frac{d}{dt} y(t) = \cos(t)$

$l = \int_0^{4\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$

$= \int_0^{4\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}\, dt$

$= \int_0^{4\pi} 1\, dt = t \Big|_0^{4\pi} = \underline{4\pi}$

$\frac{d}{dt} x(t) = -3\sin(t) \quad \frac{d}{dt} y(t) = 3\cos(t)$

$\int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t)}\, dt = 3 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}\, d$

$= 3 \int_0^{2\pi} 1\, dt = 3[t] \Big|_0^{2\pi} = 3 \cdot 2\pi = \underline{6\pi}$

c) $x'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\sqrt{2x^2} = 1$

$\underline{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

d) $x\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

3. (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - 4y = 0$. (3)

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - 4y' + 4y = 0$. (3)

(c) Bestimmen Sie die Lösung beider Differentialgleichungen in (a) und (b), jeweils für dieselben Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$, und fertigen Sie für beide Lösungen eine Skizze an. (4)

3) a) $\lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

b) $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-4}$

$\lambda_{1,2} = 2$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

c) a) $y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x}$

I: $C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -C_1$

II: $2C_1 - 2C_2 = 2$

$2C_1 + 2C_1 = 2$

$4C_1 = 2$

$C_1 = \frac{1}{2} \rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}$

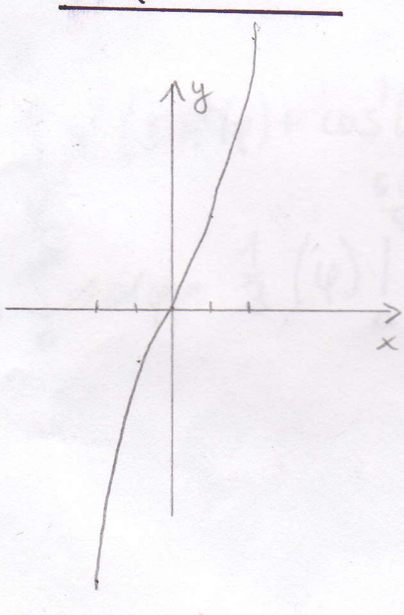
$y = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$

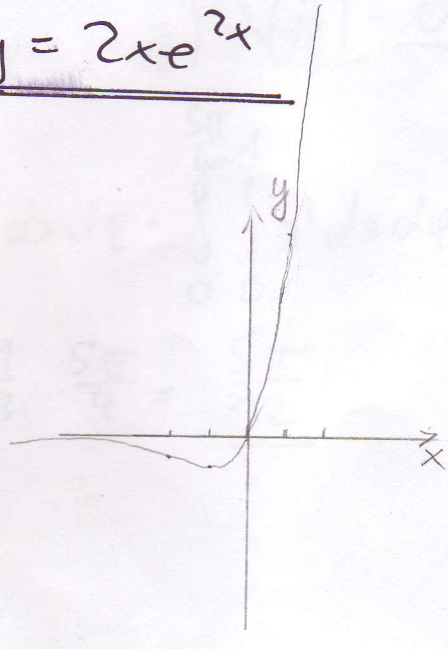
b) $y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 (e^{2x} + 2x e^{2x})$

$C_1 = 0$

$C_2 (1) = 2$

$y = 2x e^{2x}$





4. (a) Zeichnen Sie eine Skizze der folgenden Mengen:

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

und

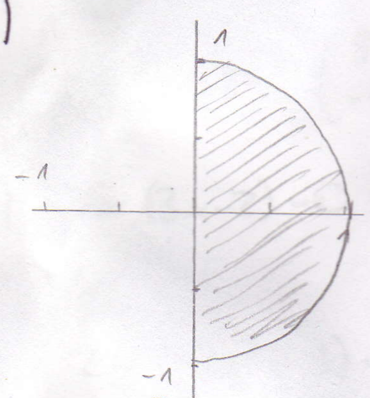
$$B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}$$

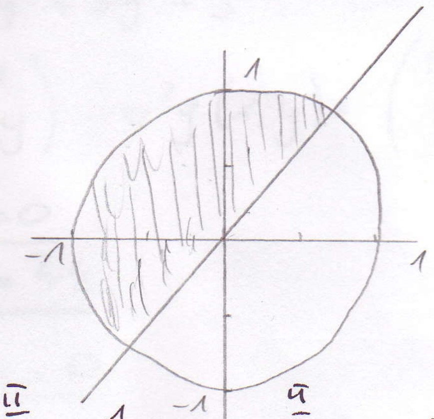
(2)

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_{B_1} 1\,dx\,dy$ (4)

(c) Berechnen Sie das Integral $\int_{B_2} x^2 + y^2\,dx\,dy$ (4)

4)a)





b) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \underline{\frac{\pi}{2}}$

c) $\int_0^{\frac{5\pi}{4}}\int_0^1 r^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,dr\,d\varphi = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{r^3}{3}\sin(\varphi)\cos(\varphi)\Big|_0^1 d\varphi$

$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{5\pi}{4}} \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \underline{0}$

c) $\int_0^{\frac{5\pi}{4}}\int_0^1 r^2\left(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right) dr\,d\varphi = \int_0^{\frac{5\pi}{4}}\int_0^1 r^2\,dr\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{5\pi}{4}} r^3\Big|_0^1 d\varphi$

$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{5\pi}{4}} 1\,d\varphi = \frac{1}{3}(\varphi)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5\pi}{4} = \underline{\frac{5\pi}{12}}$