# UE Logik für Wissensrepräsentation WS 2016/17

## Aufgabenblatt 3: Nichtmonotones Schließen und Behandlung inkonsistenten Wissens

---

## Beispiel 1:

Bereche CIRC($T$; On) für

$$T = (\exists x \neg \mathrm{On}(a,x)) \wedge \mathrm{On}(a,b)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Charakterisierung der Circumscription für solitäre Formeln.

---

Sei das Prädikat $E$ definiert durch $E(x,y) := x = a \wedge y = b$.
$T$ ist solitär:

$$\underbrace{\exists x\ \neg \mathrm{On}(a,x)}_{N[\mathrm{On}]} \wedge \underbrace{\forall x \forall y\ (x = a \wedge y = b) \supset \mathrm{On}(x,y)}_{E \leq \mathrm{On}}$$

CIRC($T$; On) ist daher

$$\underbrace{\exists x\ \neg x = b}_{N[E]} \wedge \underbrace{\mathrm{On}(a,b)}_{(E \leq \mathrm{On})} \wedge \underbrace{\forall x \forall y\ \mathrm{On}(x,y) \supset (x = a \wedge y = b)}_{(E \geq \mathrm{On})}$$

## Beispiel 2:

Man berechne die Extensionen folgender Default Theorien $\{W, D\}$ (alle involvierten Formeln sind Atomformeln):

(a) $W := \{\ \text{Student}\ \};$
$$D := \left\{ \frac{\text{Adult:Employed}}{\text{Employed}}, \frac{\text{Student:}\neg\text{Employed}}{\neg\text{Employed}}, \frac{\text{Student:Adult}}{\text{Adult}} \right\}.$$

(b) $W := \{\ \text{Student}\ \};$
$$D := \left\{ \frac{\top\text{:Adult}\supset\text{Employed}}{\text{Adult}\supset\text{Employed}}, \frac{\text{Student:}\neg\text{Employed}}{\neg\text{Employed}}, \frac{\text{Student:Adult}}{\text{Adult}} \right\}.$$

---

(a)

$$\begin{array}{lll}
E_1 = \mathrm{Th}(\{\text{Student}\}) & D_{E_1} & \Gamma_T(E_1) = E_6 \\
E_2 = \mathrm{Th}(\{\text{Student}, \text{Employed}\}) & & \\
E_3 = \mathrm{Th}(\{\text{Student}, \text{Employed}, \text{Adult}\}) & D_{E_2} = D_{E_3} & \Gamma_T(E_{2,3}) = E_3 \\
E_4 = \mathrm{Th}(\{\text{Student}, \neg\text{Employed}\}) & & \\
E_5 = \mathrm{Th}(\{\text{Student}, \neg\text{Employed}, \text{Adult}\}) & D_{E_4} = D_{E_5} & \Gamma_T(E_{4,5}) = E_5 \\
E_6 = \mathrm{Th}(\bot) & D_{E_6} = \emptyset & \Gamma_T(E_6) = E_1
\end{array}$$

$$D_{E_1} = D$$

$$D_{E_2} = D_{E_3} = \left\{ \frac{\text{Adult}}{\text{Employed}}, \frac{\text{Student}}{\text{Adult}} \right\}$$

$$D_{E_4} = D_{E_5} = \left\{ \frac{\text{Student}}{\neg\text{Employed}}, \frac{\text{Student}}{\text{Adult}} \right\}$$

$$D_{E_6} = \emptyset$$

Die Extensions sind $E_3$ und $E_5$.

(b)

$$
\left.\begin{array}{ll}
E_1 & = \mathrm{Th}(\{\mathrm{Student}\}) \\
E_2 & = \mathrm{Th}(\{\mathrm{Student}, \mathrm{Adult} \supset \mathrm{Employed}\}) \\
E_3 & = \mathrm{Th}(\{\mathrm{Student}, \neg\mathrm{Employed}\}) \\
E_4 & = \mathrm{Th}(\{\mathrm{Student}, \mathrm{Adult}\})
\end{array}\right\} \quad D_{E_1} = \ldots = D_{E_4} \quad \Gamma_T(E_{1,2,3,4}) = E_8
$$

$$
\begin{array}{lll}
E_5 = \mathrm{Th}(\{\mathrm{Student}, \mathrm{Adult} \supset \mathrm{Employed}, \neg\mathrm{Employed}\}) & \} \; D_{E_5} & \Gamma_T(E_5) = E_5 \\
E_6 = \mathrm{Th}(\{\mathrm{Student}, \mathrm{Adult} \supset \mathrm{Employed}, \mathrm{Adult}\}) & \} \; D_{E_6} & \Gamma_T(E_6) = E_6 \\
E_7 = \mathrm{Th}(\{\mathrm{Student}, \neg\mathrm{Employed}, \mathrm{Adult}\}) & \} \; D_{E_7} & \Gamma_T(E_7) = E_7 \\
E_8 = \mathrm{Th}(\perp) & \} \; D_{E_8} & \Gamma_T(E_8) = E_1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{E_1} &= D_{E_2} = D_{E_3} = D_{E_4} = D \\
D_{E_5} &= \left\{ \frac{\top}{\mathrm{Adult}\supset\mathrm{Employed}}, \frac{\mathrm{Student}}{\neg\mathrm{Employed}} \right\} \\
D_{E_6} &= \left\{ \frac{\top}{\mathrm{Adult}\supset\mathrm{Employed}}, \frac{\mathrm{Student}}{\mathrm{Adult}} \right\} \\
D_{E_7} &= \left\{ \frac{\mathrm{Student}}{\neg\mathrm{Employed}}, \frac{\mathrm{Student}}{\mathrm{Adult}} \right\} \\
D_{E_8} &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Die Extensions sind $E_5$, $E_6$ und $E_7$.

## Beispiel 3:

Geben Sie eine möglichst einfache Menge von Defaults $D$ an, sodass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $\{W_1, D\}$ mit $W_1 = \{$ Montag $\}$ besitzt genau die Extension

$$\mathrm{Th}(\{\ \mathrm{Montag},\ \mathrm{Arbeit}\ \})$$

2. $\{W_2, D\}$ mit $W_2 = \{$ Feiertag $\}$ besitzt genau die Extension

$$\mathrm{Th}(\{\ \mathrm{Feiertag},\ \neg\mathrm{Arbeit}\ \})$$

3. $\{W_3, D\}$ mit $W_3 = \{$ Montag, Feiertag $\}$ besitzt genau die Extension

$$\mathrm{Th}(\{\ \mathrm{Montag},\ \mathrm{Feiertag},\ \neg\mathrm{Arbeit}\ \})$$

---

$$D := \left\{ \frac{\mathrm{Montag{:}Arbeit}}{\mathrm{Arbeit}}, \frac{\mathrm{Feiertag{:}}\top}{\neg\mathrm{Arbeit}} \right\}$$

## Beispiel 4:

Betrachte die Theorie

$$T = \{p \vee s, \neg r \vee \neg q, p \supset (q \supset r), s \vee \neg(p \wedge r), p \wedge q\}$$

(a) Bestimme die freie Basis $\bigcap_{S \in \mathrm{MC}(T)} S$ von $T$.

(b) Welche der folgenden Relationen gelten?

(i) $T \models_{\mathrm{MC}} (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

(ii) $T \models_{\mathrm{MC}} r \supset s$.

| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $p \vee s$ | $\neg r \vee \neg q$ | $p \supset (q \supset r)$ | $s \vee \neg(p \wedge r)$ | $p \wedge q$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | × |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | ✓ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | × |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | × |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | × |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | × |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | × |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | × |

Die maximal konsistenten Teilmengen sind daher

$$\mathrm{MC}(T) = \left\{ \begin{array}{l} \{p \vee s, p \supset (q \supset r), s \vee \neg(p \wedge r), p \wedge q\}, \\ \{p \vee s, \neg r \vee \neg q, s \vee \neg(p \wedge r), p \wedge q\}, \\ \{p \vee s, \neg r \vee \neg q, p \supset (q \supset r), s \vee \neg(p \wedge r)\} \end{array} \right\}$$

und die freie Basis von $T$ ist

$$\bigcap_{S \in \mathrm{MC}(T)} S = \{p \vee s, s \vee \neg(p \wedge r)\}$$

Da die freie Basis vom Modell $\{s, \neg p, q, r\}$ erfüllt wird gilt (i) nicht.
Wenn die freie Basis von einem Modell mit $\neg s$ erfüllt wird, dann muss dieses Modell $p$ und $\neg(p \wedge r)$ erfüllen und damit auch $\neg r$ (d.h. $\bigcap_{S \in \mathrm{MC}(T)} S \models_{\mathrm{MC}} \neg r \supset \neg s$). Daher gilt (ii).

## Beispiel 5:

Zeige, dass für die in der VO vorgestellte 3-wertige Logik $L_3$ das Deduktionstheorem gilt.

$$\begin{array}{rl} & T \models_3 A \supset B \\ \text{gdw} & \mathrm{Mod}_3(T) \subseteq \mathrm{Mod}_3(\{A \supset B\}) \\ \text{gdw} & \text{für all Modelle } m \text{ mit } V^m(T) \text{ wahr: } V^m(A \supset B) \in \{1, u\} \\ {}^*\text{gdw} & \text{für all Modelle } m \text{ mit } V^m(T) \text{ wahr: wenn } V^m(A) \in \{1, u\} \text{ dann } V^m(B) \in \{1, u\} \\ \text{gdw} & \mathrm{Mod}_3(T \cup \{A\}) \subseteq \mathrm{Mod}_3(\{B\}) \\ \text{gdw} & T \cup \{A\} \models_3 B \end{array}$$

(*):

| $\supset$ | 1 | 0 | $u$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | $u$ |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| $u$ | 1 | 0 | $u$ |