Goldstern, 2024-01-13

Wohlordnungen

Definition 1. Sei M eine Menge. Eine *(strikte) Wohlordnung* von M ist eine Relation $<$, die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $<$ ist areflexiv ($\forall m \in M: \neg(m < m)$) und transitiv.
2. $<$ ist linear (oder „trichotomisch“): $\forall x, y \in M : x < y \lor y < x \lor x = y$.
3. $<$ ist *wohlfundiert*: Für alle nichtleeren Teilmengen $A \subseteq M$ gibt es ein „$<$-minimales“ Element von A, also ein $a_0 \in A$ mit $\forall a \in A : \neg(a < a_0)$.

Sowohl die Relation $<$ als auch die Struktur $(M, <)$ heißen Wohlordnung. Wenn die Relation $<$ aus dem Kontext ersichtlich ist, nennen wir auch die Menge eine Wohlordnung.

Es ist auch üblich, reflexive Relationen R als Wohlordnung zu bezeichnen, wenn der nichtreflexive Teil von R (also die Menge $R \setminus \{(m, m) : m \in M\}$) eine strikte Wohlordung ist.

Beispiel: Die natürlichen Zahlen mit der üblichen Ordnung. Die natürlichen Zahlen mit der Ordnung $0 < 2 < 4 < \cdots < 1 < 3 < \cdots$.

Beispiel: Jede Teilmenge einer Wohlordung ist (mit der eingeschränkten Ordnung) sebst eine WO.

Definition 2. Wenn $(L, <)$ eine beliebige strikte Ordnung ist, $a \in L$, dann schreiben wir L_a oder $L_{<a}$ für die Menge $\{x \in L : x < a\}$, oder auch für die auf dieser Menge induzierte WO $(L_a, (<'))$, wobei $x <' y \Leftrightarrow x < y$ und $x, y \in L_a$.

Die Menge L_a heißt „der durch a induzierte Anfangsabschnitt von L“.

Ein Anfangsabschnitt von L ist eine Teilmenge $A \subseteq L$, die nach unten abgeschlossen ist, also $\forall x \forall a : (x < a \land a \in A \Rightarrow x \in A)$ erfüllt.

Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, schreiben wir A_∞ oder $A_{<\infty}$ für die Menge A selbst. (Als ∞ stellen wir uns irgendein Element $\infty \notin A$ vor, und wir ordnen $A \cup \{\infty\}$ so, dass $\forall a \in A : a < \infty$ gilt, und die Ordnung auf A weiterhin verwendet wird.

Lemma 3. *Sei $(W, <)$ eine WO. Dann gibt es zu jedem Anfangsabschnitt $A \subsetneq L$ ein Element $a \in L$, welches A induziert.*

Äquivalent: Für jeden Anfangsabschnitt A von W gibt es ein $a \in W \cup \{\infty\}$ sodass $A = W_{<\infty}$.

Beweis: Nämlich $a := \min((L \cup \infty) \setminus A)$.

Satz 4 (Transfinite Rekursion, Version mit Zielmenge)**.** *Sei $(W, <)$ Wohlordnung, B eine Menge, und sei G eine Funktion von $P(B)$ nach B. Dann gibt es genau eine Funktion $f : W \to B$, die*

$$\forall x \in W : f(w) = G(f[W_x])$$

erfüllt.

Beweisskizze. Wir betrachten die Menge R aller Paare (w, s), sodass $w \in W \cup \{\infty\}$, $s : W_{<w} \to B$, und $\forall x < w : s(x) = G(s[W_x])$ gilt, sowie die „gute“ Menge W_0 aller $w \in W \cup \{\infty\}$ mit $\exists s : (w, s) \in R$.

Dann zeigen wir, dass es zu jedem $w \in W_0$ *genau ein* s mit $(w, s \in R$ gibt, und schließen $((w, s), (w', s') \in R \ \wedge w < w') \Rightarrow s \subseteq s'$.

Nun zeigen wir, dass $W_0 = W \cup \{\infty\}$ gelten muss, in dem wir die Annahme, dass $w \in W \setminus W_0$ minimal ist, auf einen Widerspruch führen: Wir betrachten alle $(x, s) \in R$ mit $x < w$ und vereinigen alle vorkommenden Funktionen s...

Aus $\infty \in W_0$ folgt nun die Behauptung. □

Satz 5 (Transfinite Rekursion, Version ohne Zielmenge). *Sei $(W, <)$ Wohlordnung (W Menge), und sei G eine Funktion, möglicherweise eine echte Klasse. . Dann gibt es eine Menge B und genau eine Funktion $f : W \to B$, die*

$$\forall x \in W : f(w) = G^{\bullet}(f[W_x])$$

erfüllt, wobei wir $G^{\bullet}$ so definieren:

$$\forall C : G^{\bullet}(C) := \begin{cases} G(C) & \textit{falls } G(C) \textit{ definiert} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweisskizze. So wie im vorigen Beweis, mit geringfügigen Modifikationen. Mit dem Ersetzungsaxiom zeigen wir, dass die Klasse aller vorkommenden s eine Menge ist. □

Satz 6 (Vergleichbarkeit von Wohlordnungen). *Seien $(A, <)$ und $(B, \sqsubset)$ Wohlordnungen. Dann tritt (genau) einer der folgenden Fälle ein: A und B sind isomorph, A ist isomorph zu einem echten Anfangsabschnitt von B, und umgekehrt.*

Beweis 1, Skizze. Beweis: Wir konstruieren den gesuchten Isomorphismus f durch transfinite Rekursion, sodass sein Definitionsbereich ein Anfangsabschnitt von A ist, und f Folgendes erfüllt:

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f) : f(x) = \min(B \setminus f[A_x]) \quad \square$$

Beweis 2, Skizze. Wir definieren $R := \{(a, b) \in A \times B : A_a \simeq B_b\}$, und zeigen, dass R der gesuchte Isomorphismus ist. □

Ordinalzahlen

Definition 7. Eine Menge M heißt *transitiv*, wenn $\forall x, y : (x \in y \in M \Rightarrow x \in M)$ gilt.

(Anmerkung: A transitive set is almost, but not quite, entirely *unlike* a transitive relation. Man kann zeigen, dass jede nichtleere transitive Menge M die Eigenschaft $\emptyset \in M$ hat. Eine nichtleere transitive Menge ist also niemals eine zweistellige Relation.)

Lemma 8. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *M ist transitiv.*
2. *Jedes Element von M ist Teilmenge von M. (Diese Eigenschaft wird sehr oft in Beweisen verwendet.)*
3. *$M \subseteq P(M)$.*
4. *$\bigcup M \subseteq M$. (Statt $\bigcup M$ kann man auch $\bigcup \{y : y \in M\}$ oder $\bigcup\limits_{y \in M} y$ schreiben.)*

Definition 9. Eine Menge α heißt *Ordinalzahl*, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

- Die Menge α ist transitiv.
- $(\alpha, \in)$ ist eine Wohlordnung.

Beispiele 10.

- $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $\omega = \{0, 1, \dots\}$.
- Wenn A Menge von Ordinalzahlen ist, dann ist auch $\bigcup A$ eine Ordinalzahl.
- Wenn überdies $A \neq \emptyset$ gilt, dann ist auch $\alpha := \bigcap A = \bigcap_{\beta \in A} \beta$ eine Ordinalzahl, und es gilt $\alpha \in A$.
- Wenn α eine Ordinalzahl ist, dann auch $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$.

Anmerkung: Wir haben für jede Ordinalzahl α eine neue Ordinalzahl $\alpha + 1$ definiert. In natürlicher Weise verallgemeinern wir dies zu $\alpha + 2 := (\alpha + 1) + 1$, $\alpha + 3 := \cdots$, etc. Aber wir können zB auch $\alpha + \omega := \bigcup \{\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots\}$ definieren, danach auch $\alpha + \omega + 1$, ..., $\alpha + \omega + \omega$, etc.

Die Zahl $\omega + \omega$ nennt man auch $\omega \cdot 2$. Aber nicht $2 \cdot \omega$, denn dieser Name ist für $\bigcup \{2, 2 \cdot 2 = (2 + 2), 2 \cdot 3 = (2 + 2 + 2), \dots\}$ reserviert.

Notation 11. Wir schreiben $\alpha \in \mathrm{Ord}$ für „α ist Ordinalzahl“.

Wir werden im Folgenden die griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, , \kappa, \lambda, \mu$ immer nur für Ordinalzahlen verwenden; κ, λ, μ immer nur für Kardinalzahlen. Eine Aussage $\forall \alpha : \dots$ ist also eine Abkürzung für $\forall \alpha \in \mathrm{Ord} : \dots$, oder ausführlicher $\forall \alpha : (\alpha \in \mathrm{Ord} \Rightarrow \dots)$.

Lemma 12. *Wenn α Ordinalzahl ist, und $\beta \in \alpha$, dann ist $\beta \subseteq \alpha$, also auch wohlgeordnet durch $\in$. Überdies ist β ein Anfangsabschnitt von α und auch transitiv, also auch Ordinalzahl.*

Definition 13. Sei $(W, <)$ eine Wohlordnung. Dann definieren wir die *Rangfunktion* $\rho = \rho_W$ (oder genauer $\rho_{(W,<)}$) mit Definitionsbereicht $W \cup \{\infty\}$ so:

$$\forall w \in W \cup \{\infty\} : \rho(w) = \rho[W_w]$$

Den Wert $\rho(\infty) = \rho[W]$ nennen wir den *Ordnungstyp* von $(W, <)$, kurz $\mathrm{otp}(W, <)$.

Beispiel: Sei W die Wohlordnung $a < b < c$, dann ist $\rho(a) = \emptyset$, $\rho(b) = \{\rho(a)\} = \{0\} = 1$, und $\rho(c) = \{\rho(a), \rho(b)\} = \{0,1\} = 2$.

Satz 14. *Für jede Wohlordnung $(W,<)$ gilt:*

1. *Jeder Wert von ρ_W ist eine Ordinalzahl.*
2. *Insbesondere ist der Ordnungstyp τ von W eine Ordinalzahl.*
3. *Die Abbildung ρ (eingeschränkt auf W) ist ein Isomorphismus von $(W,<)$ nach $(\tau, \in)$.*
4. *Wenn α eine Ordinalzahl ist, dann ist ρ_α einfach die Identität. (Insbesondere ist jede Ordinalzahl der Ordnungstyp einer Wohlordnung.)*

Weiters gilt: Wenn $f : W \to W'$ ein Isomorphismus von Wohlordnungen ist, dann gilt $\rho_W = \rho_{W'} \circ f$.

In jeder Klasse von isomorphen Wohlordnungen gibt es also genau eine Ordinalzahl; diese wird oft als kanonischer Vertreter ihrer Klasse verwendet. (Ähnlich wie es in jeder Klasse von gleichmächtigen Mengen genau eine natürliche Zahl gibt — die Zahl $3 = \{0,1,2\}$ ist gleichmächtig mit allen 3-elementigen Mengen.)

Satz 15. *Wenn V und W Wohlordnungen sind, mit Ordnungstypen α und β, dann gilt genau einer der folgenden Fälle:*

- *$V \simeq W$, und $\alpha = \beta$.*
- *$\exists a \in V : V_a \simeq W$, und $\beta \in \alpha$ und $\beta \subsetneq \alpha$.*
- *$\exists b \in W : V \simeq W_b$, und $\alpha \in \beta$ und $\alpha \subsetneq \beta$.*

Dies kann mal leicht aus dem Satz 6 (zusammen mit Satz 14) folgern. Umgekehrt kann man aus Satz 15 leicht Satz 6 erhalten.

Wir wissen schon (Satz 6), dass die Relation $\in$ (genauer: die Klasse aller Paare $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$, die $\alpha \in \beta$ erfüllen) eine strikte lineare Ordung ist. Sie ist aber sogar eine Wohlordnung:

Satz 16. *In jeder nichtleeren Menge (ja sogar in jeder nichtleeren Klasse) C von Ordinalzahlen gibt es ein kleinstes Element, und zwar den Durchschnitt $\bigcap C = \bigcap_{\alpha \in C} \alpha = \{x \mid \forall \alpha \in C : x \in \alpha\}$.*

Beweis: UE.

Die Klasse Ord aller Ordinalzahlen ist also durch $\in$ wohlgeordnet. Sie ist auch transitiv, scheint also alle Eigenschaften einer Ordinalzahl zu haben; sie ist aber keine Menge, sondern eine echte Klasse. (Wenn Ord eine Menge wäre, dann würde $\mathrm{Ord} \in \mathrm{Ord}$ gelten, was nicht nur dem Fundierungsaxiom widerspräche, sondern bereits der Definition der strikten Ordnung.)

Für Ordinalzahlen α, β schreibt man auch oft $\alpha < \beta$ statt $\alpha \in \beta$, wenn man α und β ähnliche Rollen spielen, insbesondere als Elemente einer wohlgeordneten Menge oder Klasse $A \subseteq \mathrm{Ord}$. Gelegentlich möchte man α und β aber auch in ihrer Rolle als Teilmengen von Ord betrachten, dass ist die zu $\alpha \in \beta$ äquivalente Formulierung $\alpha \subsetneq \beta$ praktischer.

Transfinite Rekursion

Satz 17 (Transfinite Rekursion auf Ord)**.** *Sei G eine funktionale Klasse mit Definitionsbereich* Ord*. Das heißt, wir betrachten eine Formel $\gamma(z,y)$ und nehmen $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\ \exists! y : \gamma(\alpha, y)$.*

Dann gibt es eine funktionale Klasse F (definiert durch eine Formel $\varphi(x,y)$, die wir sogar explizit angeben können, in Abhängigkeit von γ) mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \alpha \in \mathrm{Ord} : f(\alpha) = G(F[\alpha])$$

Man beachte, dass α auf der linken Seite die Rolle eines Elements von Ord spielt. Auf der rechten Seite betrachten wir α als Menge von Ordinalzahlen, also als die Menge aller $\beta < \alpha$; die Menge $F[\alpha]$ ist ja als $\{F(\beta) : \beta < \alpha\}$ definiert, oder ausführlicher als Menge $\{y \mid \exists \beta < \alpha : \varphi(\beta, y)\}$.

Beweis. Die gesuchte Formel $\varphi(x,y)$ soll sagen, dass es einen Anfangsabschnitt der gesuchten Funktion F gibt, der bis inklusive x definiert ist, bis inklusive x alles richtig gemacht hat, und an der Stelle x den Wert y hat:

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) : \ & x \text{ ist Ordinalzahl,} \\ & \text{und } \exists s\text{: } s \text{ ist Funktion mit Definitionsbereich } x{+}1,\ s(x) = y, \\ & \text{und } \forall x' \leq x : s(x') = G(s[x']). \end{aligned}$$

Mit transfiniter Induktion zeigt man nun $\forall \alpha\ \exists! y : \varphi(\alpha, y)$, daher definiert φ eine auf Ord definierte funktionale Klasse F. Dass F die Rekursionsgleichung erfüllt, ist nun leicht. $\square$

Wohlfundierte Mengen

Definition 18. Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *wohlfundiert* auf M, wenn es in jeder nichtleeren Teilmenge $A \subseteq M$ ein „R-minimales“ Element gibt, das heißt: ein Element $a_0 \in A$ sodass es kein $a \in A$ mit aRa_0 gibt.

$$\forall A \subseteq M : (A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_0 \in A \; \forall a \in A : \neg(aRa_0).$$

Eine strikte lineare Ordnung $\mathcal{M} = (M, <)$ ist genau dann eine Wohlordnung, wenn $\mathcal{M}$ wohlfundiert ist.

Lemma 19. *Sei (M, R) wohlfundiert. Dann gibt es eine Ordinalzahl γ und eine Funktion $\rho : M \to \gamma$, sodass für alle $x, y \in M$ gilt:*

$$xRy \Rightarrow \rho(x) < \rho(y)$$

Beweis. Wir werden eine Funktion ρ mit der gewünschten Eigenschaft explizit konstruieren. Unsere Funktion wird überdies die kleinste solche Funktion sein (das heißt: Wenn σ auch diese Eigenschaft hat, dann gilt $\forall x \in M : \rho\rho(x) \leq \sigma(x)$).

Für jede Menge $A \subseteq M$ sei $\mathrm{MIN}(A)$, genauer $\mathrm{MIN}_R(\alpha)$, definiert als $\{x \in A \mid \forall y \in A : \neg yRx\}$, die Menge der „minimalen“ Elemente von A. (Für $A \neq \emptyset$ gilt $\mathrm{MIN}(A) \neq \emptyset$.)

Mit dem Satz über transfinite Rekursion definieren wir eine Funktion Ord $\to \mathcal{P}(M), \alpha \mapsto M_\alpha$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \alpha : M_\alpha = \mathrm{MIN}(M \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta.$$

Weiters setzen wir $M_{<\alpha} := \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$. Wenn man das Ersetzungsaxiom auf M anwendet, sieht man $\exists \alpha : M_\alpha = \emptyset$. Sei α_0 das kleinste solche α, dann muss $M_{\alpha_0} = M$ gelten. Die Familie $(M_\alpha : \alpha < \alpha_0)$ ist nun eine Partition von M.

Sei $\rho : M \to \alpha_0$ die Abbildung die auf jeder Menge M_α konstant mit Wert α ist.

Sei xRy, und $\rho(x) = \beta$ (also $x \in M_\beta$), $\rho(y) = \alpha$. Dann ist $y \in \mathrm{MIN}(M \setminus M_{<\alpha})$, daher muss x in $M_{<\alpha}$ liegen, also $\beta < \alpha$. □

Satz 20. (M, R) *ist genau dann wohlfundiert, wenn es eine Ordinalzahl γ und eine Funktion $\rho : M \to \gamma$ gibt, sodass für alle $x, y \in M$ gilt:*

$$xRy \Rightarrow \rho(x) < \rho(y)$$

Beweis. Die eine Richtung ist das gerade bewiesene Lemma.

Für die zweite Richtung: Sei $A \subseteq M$ nicht leer; in der Menge $\{\rho(x) : x \in A\}$ muss es ein kleinstes Element γ_0 geben. Sei $x_0 \in A$ beliebig mit $\rho(x) = \gamma_0$ ... □

Definition 21. Das Fundierungsaxiom besagt: Für jede Menge M ist $(M, \in)$ wohlfundiert.

Definition 22. $V_0 := \emptyset$, $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$, und $V_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} V_\alpha$ für alle Ordinalzahlen α und alle Limesordinalzahlen δ. (Transfinite Induktion)

Lemma 23. *Jede Menge V_α ist transitiv und wohlfundiert.*

Beweisskizze. Für $x \in V_\alpha$ sei $\rho(x) := \min\{\beta < \alpha : x \subseteq V_\alpha\}$. $\square$

Lemma 24. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent zum Fundierungsaxiom:*

1. *Jede transitive Menge T ist wohlfundiert.*
2. $\forall x \; \exists \alpha : x \in V_\alpha$.

Anmerkung 25. Es gilt $V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha = \mathrm{MIN}\{x : x \notin V_\alpha\}$.

Ordinalzahlarithmetik

Eine Ordinalzahl δ heißt Limeszahl, wenn sie keine Nachfolgerzahl ist, also nicht von der Form $\alpha + 1$ ist. Äquivalent: Wenn $\bigcup \delta = \delta$. Äquivalent: Wenn die Wohlordnung $(\delta, \in)$ kein größtes Element hat.

- Wir definieren $\alpha+0 := \alpha$, $\alpha+(\beta+1) = (\alpha+\beta)+1$, und $\alpha+\delta = \bigcup_{\beta<\delta} \alpha+\beta$ für Limeszahlen $\delta > 0$.
  (Anmerkung: $\alpha+\beta$ ist der Ordnungstyp von $(\{0\}\times\alpha)\cup(\{1\}\times\beta)$, lexikographisch geordnet. Achtung – nicht kommutativ. ZB ist $1+\omega = \omega < \omega+1$)
- Wir definieren $\alpha \cdot 0 := 0$, $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$, und $\alpha \cdot \delta = \bigcup_{\beta<\delta} \alpha \cdot \beta$ für Limeszahlen $\delta > 0$.
  (Anmerkung: $\alpha\cdot\beta$ ist der Ordnungstyp von $\beta\times\alpha$, lexikographisch geordnet. Achtung! $2 \times \omega = \omega < \omega + \omega = \omega \times 2$.)
- Addition und Multiplikation sind assoziativ, und es gilt ein Distributivgesetz: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Aber $(1 + 1) \cdot \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot (1 + 1)$.
- Für $\alpha > 0$ definieren wir $\alpha^0 := 1$, $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$, und $\alpha^\delta = \bigcup_{\beta<\delta} \alpha^\beta$ für Limeszahlen δ. Weiters sei $0^0 = 1$ und[1] $0^\beta = 0$ für $\beta > 0$.
  Achtung! 2^ω ist eine abzählbare Ordinalzahl, aber $2^{\aleph_0}$ ist eine überabzählbare Kardinalzahl.

[1]Die Gleichung $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$ gilt also für alle α, auch für $\alpha = 0$. Die Gleichung für Limeszahlen muss man zu $\alpha^\delta = \lim\limits_{\beta\to\delta} \alpha^\beta$ modifizieren, damit sie für alle Ordinalzahlen gilt.

Kardinalzahlen

Aus dem Auswahlaxiom folgt, dass es auf jeder Menge eine Wohlordnung gibt. Mit dem Ersetzungsaxiom haben wir gesehen, dass jede solche Wohlordnung zu einer Ordinalzahl isomorph ist. Daher (mit Satz 16) gibt es zu jeder Menge M eine kleinste Ordinalzahl α mit $M \approx \alpha$ (d.h. $\exists f : M \to \alpha$ bijektiv).

Definition 26. Wir nennen eine Wohlordnung $(W, <)$ *initiale Wohlordnung*, wenn W zu keinem echten Anfangsabschnitt gleichmächtig ist.

Wir nennen eine Ordinalzahl α *initiale Ordinalzahl* oder häufiger *Kardinalzahl*, wenn $(\alpha, \in)$ initiale Wohlordnung ist; äquivalent: wenn $\forall \beta < \alpha : \beta \not\approx \alpha$ gilt.

Für jede Menge M definieren wir $|M|$, die *Kardinalität* oder *Kardinalzahl* von M als $|M| := \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \alpha \approx M\}$. (Aus der Definition folgt leicht, dass $|M|$ tatsächlich eine initiale Ordinalzahl ist.)

Zum Beispiel sind $0, 1, 2, 3, \ldots$ und auch $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ Kardinalzahlen; $\omega + 1$ oder $\omega + \omega$ aber nicht, weil diese beiden Mengen gleichmächtig mit ω sind.

Mit ω_1 bezeichnen wir die kleinste überabzählbare Ordinalzahl. Jede Ordinalzahl $\alpha < \omega_1$ ist also abzählbar[2]. Umgekehrt kann eine abzählbare Ordinalzahl nicht $> \omega_1$ sein, denn sonst würde sie ja ω_1 als überabzählbare Teilmenge haben. Die Zahl ω_1 ist also genau die Menge aller höchstens abzählbaren Ordinalzahlen.

(Analog zu ω: das ist die Menge aller endlichen Ordinalzahlen.)

Notation 27. Wenn man über die Ordinalzahlen ω oder ω_1 in ihrer Rolle als Kardinalzahlen spricht, nennt man sie üblicherweise $\aleph_0$ und $\aleph_1$. Analoges gilt für größere Kardinalzahlen.

Zum Beispiel ist die Ausssage $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ eine Kurzform der (wahren) Aussage „Wenn A abzählbar ist, und $x \notin A$, dann ist $A \cup \{x\}$ auch abzählbar.“ Hingegen ist $\omega + 1 = \omega$ die *falsche* Aussage $\omega \cup \{\omega\} = \omega$.
Dasselbe Symbol $+$ hat also im Zusammenhang mit Ordinalzahlen und mit Kardinalzahlen verschiedene Bedeutungen. („overloading“ von Operatoren. So gilt in manchen Programmiersprachen die Gleichung $2/3 = 0$, nicht aber $2./3 = 0$.)

Definition 28. Für jede Ordinalzahl α definieren wir $\aleph_\alpha$ als die kleinste unendliche Kardinalzahl, die eine echte obere Schranke der Menge $\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ ist. (Definition durch transfinite Rekursion.)

$\aleph_0$ ist somit die kleinste unendliche Kardinalzahl, $\aleph_1$ die nächste, etc. Die Kardinalzahl $\aleph_\omega$ ist die kleinste Kardinalzahl die (in der Ordnung der unendlichen Kardinalzahlen) unendlich viele Vorgänge hat. Ebenso ist $\aleph_{\omega_1}$ die kleinste Kardinalzahl mit überabzählbar vielen Vorgängern.

[2] Das Wort „abzählbar“ bedeutet hier „höchstens abzählbar“, oder ausführlicher „abzählbar unendlich oder endlich“. Oft wird aber „abzählbar“ für „abzählbar unendlich“ verwendet, also „abzählbar aber nicht endlich“.

Definition 29. Für jede unendliche Kardinalzahl κ definieren wir $I(\kappa)$, den Index von κ, als den Ordnungstyp der Menge aller unendlichen Kardinalzahlen $< \kappa$:

$$I(\kappa) = \mathrm{otp}\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Card}, \aleph_0 \leq \lambda < \kappa\}.$$

Zum Beispiel ist $I(\aleph_0) = \mathrm{otp}(\emptyset) = 0$, und $I(\aleph_1) = \mathrm{otp}\{\aleph_0\} = 1$.

Lemma 30. *1. Für alle Ordinalzahlen α gilt $I(\aleph_\alpha) = \alpha$.*

2. Für alle unendlichen Kardinalzahlen κ gilt $\aleph_{I(\kappa)} = \kappa$.

Kardinalzahlarithmetik

Definition 31. 1. Für beliebige Kardinalzahlen κ und λ definieren wir die Kardinalzahl $\kappa + \lambda$ als die Kardinalität der Menge $(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})$.

2. Allgemeiner: Wenn $(\kappa_i : i \in I)$ eine Familie von Kardinalzahlen ist, dann definieren wir $\sum_{i \in I} \kappa_i$ als die Kardinalität der Menge $\bigcup_{i \in I} \kappa_i \times \{i\}$. (Insbesondere ist $\sum_{i \in \{1,2\}} \kappa_i = \kappa_1 + \kappa_2$.)

3. $\kappa \cdot \lambda$ definieren wir als die Kardinalität des Produkts $\kappa \times \lambda = \{(x, y) : x \in \kappa, y \in \lambda\}$.

4. Allgemeiner: Wenn $(\kappa_i : i \in I)$ eine Familie von Kardinalzahlen ist, dann definieren wir $\prod_{i \in I} \kappa_i$ als die Kardinalität des „kartesischen" Produkts der κ_i, also als Kardinalität der folgenden Menge (die manchmal mit $\bigtimes_{i \in I} \kappa_i$ genannt wird, oft aber auch $\prod_{i \in I}$ — sorry!):

$$\{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} \kappa_i,\ \forall i \in I : f(i) \in \kappa_i\}$$

   Insbesondere ist $\prod_{i \in \{1,2\}} \kappa_i = \kappa_1 \cdot \kappa_2$.

5. Ein weiterer Spezialfall verdient eine eigene Notation: Wenn alle κ_i den gleichen Wert κ haben, und $|I| = \lambda$, dann schreiben wir ${}^\lambda\kappa$ für die Menge aller Funktionen von λ nach κ, und κ^λ für die Kardinalität dieser Menge.

(Für den Spezialfall $\kappa = \lambda = 0$ haben wir somit $0^0 := 1$ definiert. Das scheint der Konvention „0^0 ist eine unbestimmte Form" aus der Analysis zu widersprechen. In Wirklichkeit ist das wiederum ein Fall von Overloading; in der Analysis geht es um die Funktion $(x, y) \to x^y$ für reelle oder komplexe x und y, in der Mengenlehre sind x und y aber Kardinalzahlen. Auf den natürlichen Zahlen stimmen die beiden Konventionen überein, außer im Fall 0^0.)

Anmerkung 32. Wenn $\forall i \in I : \kappa_i > 0$ gilt, und I unendlich ist, dann kann man leicht beweisen, dass $\sum_{i \in I} \kappa_i = |I| \cdot \sup\{\kappa_i : i \in I\}$ gilt.
Die Ungleichung „$\leq$" ist hier trivial, für die andere Richtung braucht man $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$, siehe Satz 33)

Ebenso ist die analoge Ungleichung $\prod_{i \in I} \kappa_i \leq \left(\sup\{\kappa_i : i \in I\}\right)^{|I|}$ leicht bweisbar. In der Praxis gilt auch hier oft Gleichheit.

Satz 33. *Für alle Kardinalzahlen $\kappa, \lambda \geq \aleph_0$ und alle $n \in \omega \setminus \{0\}$ gilt*

1. $1 + \kappa = \kappa$ *und allgemeiner* $n + \kappa = \kappa$
2. $2 \cdot \kappa = \kappa$ *und allgemeiner* $n \cdot \kappa = \kappa$
3. $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.
4. $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, *und allgemeiner* $\kappa^n = \kappa$.
5. $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

Beweis. 1. Es genügt, $\kappa + 1 = \kappa$ nachzuprüfen. Man kann hier $\omega \approx \omega + 1$ verwenden (und den Vergleichbarkeitssatz für Wohlordnungen).

2. Es genügt, $2 \cdot \kappa \equiv \kappa$ nachzuprüfen.

   - Beweisskizze 1: Wir dürfen (warum?) annehmen, dass $\kappa > \aleph_0$ gilt und für alle unendlichen Kardinalzahlen $\lambda < \kappa$ bereits $2 \cdot \lambda = \lambda$ bekannt ist, also auch $\forall \alpha : (\omega \leq \alpha < \kappa) \Rightarrow (|2 \times \alpha| = |\alpha| < \kappa)$.
     Wir geben eine Wohlordnung von $\{0, 1\} \times \kappa$ an, deren echte Anfangsabschnitte alle kürzer als κ sind, nämlich die lexikographische Ordnung. Daher hat die gesamte Menge höchstens Ordnungstyp κ. (Auch mindestens, das sollte klar sein.)
   - Beweisskizze 2: Wir betrachten die Menge

     $$\{(A, f) : A \subseteq \kappa, f : A \to A \times 2 \text{ bijektiv}\}$$

     und ordnen sie in naürlicher Weise (komponentenweise $\subseteq$). In dieser Ordnung ist jede Kette durch die „punktweise“ Vereinigung beschränkt – Bijektivität nachprüfen! – also gibt es ein maximales Element (A^*, f^*). Die Differenzmenge $\kappa \setminus A^*$ muss endlich sein, sonst findet man (mit Hilfe von $2\dot{\aleph}_0 = \aleph_0$) einen Widerspruch zur Maximalität. Dann gilt aber (warum?) $A^* \approx \kappa$; zusammen mit $A^* \times 2 \approx A^*$ erhält man $\kappa \times 2 \approx \kappa$.

3. Addition und Multiplikation sind offensichtlich (schwach) monoton: Aus $\kappa \leq \kappa'$ und $\lambda \leq \lambda'$ folgt $\kappa + \lambda \leq \kappa' + \lambda'$ und $\kappa \cdot \lambda \leq \kappa' \cdot \lambda'$.
   Sei oBdA $\kappa \leq \lambda$. Dann ist $\kappa + \lambda \leq \lambda + \lambda = 2 \cdot \lambda = \lambda$.

4. Wiederum dürfen wir annehmen, dass κ überabzählbar ist, und dass für alle unendlichen $\lambda < \kappa$ bereits $\lambda \cdot \lambda = \lambda$ gilt.

   - Beweisskizze 1: Wir geben eine Ordnung auf $\kappa \times \kappa$ an, deren echte Anfangsabschnitte alle $< \kappa$ sind. Diesmal aber nicht die lexikographische Ordnung. (Warum nicht? Betrachte den durch $(1, 0)$ beschränkten Anfangsabschnitt von $\kappa \times \kappa$.)
     Für $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in \kappa \times \kappa$ definieren wir $(\alpha, \beta) < (\alpha', \beta')$ genau dann, wenn entweder $\max(\alpha, \beta) < \max(\alpha', \beta')$ gilt, oder die beiden Maxima

gleich sind und $\alpha < \alpha'$ gilt, oder wenn nicht nur die beiden Maxima sondern auch die Werte α, α' gleich sind und $\beta < \beta'$ gilt.
Kürzer: Wir definieren eine injektive Abbildung $f : \kappa \times \kappa \to \kappa \times \kappa \times \kappa$ durch $f(\alpha, \beta) = (\max(\alpha, \beta), \alpha, \beta)$; die lexikographische Ordnung auf $\kappa \times \kappa \times \kappa$ induziert nun eine Wohlordnung auf $\kappa \times \kappa$. Man muss nachprüfen, dass die Anfangsabschnitte alle $< \kappa$ sind. Dazu verwendet man $\lambda < \kappa \Rightarrow \lambda \cdot \lambda = \lambda < \kappa$.

- Beweisskizze 2: Wir betrachten die Menge $\{(A, f) : A \subseteq \kappa, |A| \geq \aleph_0, f : A \to A \times A \text{ bijektiv}\}$ und ordnen sie in naürlicher Weise. Wie im vorigen Beweis wenden wir das Lemma von Zorn an, um ein maximales Paar (A^*, f^*) zu finden. Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1: A^* ist „groß“, genauer: $|A^*| = \kappa$.
Also gibt es eine Bijektion $h : \kappa \to A^*$. Da wir bereits eine Bijektion $f^* : A^* \to A^* \times A^*$ haben, finden wir durch Kombination von f^* und h eine Bijektion $g : \kappa \to \kappa \times \kappa$.
Fall 2: Das Komplement von A^* ist groß, genauer: $|\kappa \setminus A^*| \geq |A^*|$.
(Die Fälle 1 und 2 sind jetzt nicht disjunkt. Macht nichts.)
Wir finden eine Teilmenge $B^* \subseteq \kappa \backslash A^*$ mit $A^* \approx B^*$, also $|B^*| = |A^*|$.
Wegen $A^* \times A^* \approx A^*$ sind die vier Mengen

$$\begin{array}{cc} A^* \times A^* & B^* \times A^* \\ A^* \times B^* & B^* \times B^* \end{array}$$

alle gleichmächtig mit B^*, daher gibt es eine Bijektion f' von B^* auf die Vereinigung der letzten drei Mengen. $(3 \cdot \lambda = \lambda!)$. Wir setzen $A^{**} := A^* \cup B^*$, dann ist $A^{**} \times A^{**}$ die disjunkte Vereinigung der 4 genannten Mengen, und wir können die Funktion $f^* : A^* \to A^* \times A^*$ zu einer Bijektion $f^{**} : A^{**} \to A^{**} \times A^{**}$ fortsetzen, nämlich durch $f^{**} = f^* \cup f'$.

$$f^* \cup f' : A^* \cup B^* \to A^* \times A^* \ \cup \ A^* \times B^* \ \cup \ B^* \times A^* \ \cup \ B^* \times B^*$$

fortsetzen; das Paar (A^{**}, f^{**}) liefert einen Widerspruch zur Maximalität.
Fall 3: Weder 1 noch 2. Dann muss $|A^*| < \kappa$ und $|\kappa \setminus A^*| < |A^*| < \kappa$ gelten. Das ist unmöglich wegen $\lambda \cdot 2 = \lambda$. $\square$

Satz 34 (Satz von König)**.** *Sei I eine beliebige Indexmenge. Weiters seien $\bar{\kappa} = (\kappa_i : i \in I)$ und $\bar{\lambda} = (\lambda_i : i \in I)$ Familien von Kardinalzahlen mit $\forall i : \kappa_i < \lambda_i$.*

Dann gilt $\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$.

(Wichtig: hier steht eine strikte $<$-Relation, nicht bloß $\leq$. Aus den Voraussetzungen kann recht trivial die schwachen Ungleichungen $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \sum_{i \in I} \lambda_i$ und $\prod_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \lambda_i$ herleiten.)

Beweis. Sei $A = \bigcup_i A_i$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen mit $|A_i| = \kappa_i$, und seien B_i Mengen der Größe λ_i. Wir zeigen, dass es keine surjektive Funktion von der Summe $A := \bigcup_i A_i$ auf das Produkt $B := \prod_i B_i$ gibt.

Genauer: Zu jeder Funktion $f : A \to B$ werden wir ein Element $b = b_f \in B$ konstruieren, welches nicht im Wertebereich von f liegt.

Für jedes $j \in I$ sei $p_j : B \to B_j$ die Projektion auf die j-te Koordinate; für $\vec{y} = (y_i : i \in I) \in B$ sei also $p_j(\vec{y}) = y_j$.

Wegen $|A_j| < |B_j|$ kann die Funktion $p_j \circ (f \restriction A_j) : A_j \to B_j$ nicht surjektiv sein. Daher gibt es ein Element $b_j \in B$, das von dieser Funktion nicht getroffen wird.

Es gilt also $\forall a \in A_j : p_j(f(a)) \neq b_j$

Für jedes $i \in I$ haben wir so ein b_i gefunden; sei $\vec{b} = (b_i : i \in I)$. Für jedes $j \in I$ zeigen wir nun $\vec{b} \notin f[A_j]$; daraus folgt dann $\vec{b} \notin f[A]$.

Nach Definition von b_j gilt für alle a in A_j: $p_j(f(a)) \neq b_j$; aber offensichtlich ist $p_j(\vec{b}) = b_j$. Daher muss $f(a) \neq \vec{b}$ gelten. $\square$

Beispiel 35. $\aleph_\omega < \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Beweis. König, mit $I = \omega$, $\kappa_i := \aleph_i$ für alle i, und $\lambda_i = \aleph_\omega$. $\square$

Korollar 36. $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Beweis. $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, aber Es gilt $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, d.h. $(2^{\aleph_0})$ ist ein Fixpunkt der Funktion $x \mapsto x^{\aleph_0}$. $\aleph_\omega$ ist aber kein solcher Fixpunkt. $\square$

Anmerkung: Die folgenden Aussagen sind in ZFC weder beweisbar noch widerlegbar:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1, 2^{\aleph_0} = \aleph_2, 2^{\aleph_0} = \aleph_3, 2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}, 2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+\omega+7}, 2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$$

Satz 37 (Satz von Cantor)**.** *Für alle Mengen I gilt $|I| < 2^{|I|}$.*

Beweis. König mit $\kappa_i := 1$, $\lambda_i := 2$. $\square$