Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

1.Übungstest Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Gruppe 5 (Fischl)

zusammengestellt von Lorenz Fischl

03.04.2019

1. Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz.

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n^2+3n}{n^3+n}$$

2. Gegeben Sei die Folge $a_n = 1+\frac{1}{n}-\sin(\frac{n\pi}{2})$

   i) Beschreiben Sie mathematisch präzise, was ein Häufungspunkt a einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

   ii) Geben Sie alle Häufungspunte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

   iii) Zeigen Sie anhand der Definition, dass diese Punkte tatsächlich Häufungspunkte sind.

3. i) Untersuchen Sie die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ gegeben durch $b_0 = 10$ und $b_{n+1} = 2\sqrt{b_n - 1}$ auf Monotonie, Beschrenktheit und Konvergenz.

   ii) Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an. Ist dieser auch ein Häufungspunkt? (Begründen Sie Ihre Antwort)

Lösungen für 1. UE Test Mittwoch 03.04.2019 Lorenz Fischl

1) wollen Leibniz kriterium anwenden. Benötigen dafür 1

a) $a_n := \frac{n^2+3n}{n^3+n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ 2

b) a_n monoton fallend. 3

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$ mit Lim Rechenregeln $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ für $a_n \to a$ $b_n \to b \neq 0$

b) da $a_n = \frac{n+3}{n^2+1}$ ist $a_n > a_{n+1}$

$\iff \frac{n+3}{n^2+1} > \frac{n+1+3}{(n+1)^2+1}$

$\iff (n+3)(n^2+2n+2) > (n+4)(n^2+1)$

$\iff n^2+7n+2 > 0$ w.A. $\forall n \in \mathbb{N}$

somit a_n monoton fallend.

Damit ist Leibniz anwendbar und die Reihe konvergent.

---

2) $a_n = 1 + \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 + \frac{1}{n} - \begin{cases} 0 & n \equiv_2 0 \\ 1 & n \equiv_4 1 \\ -1 & n \equiv_4 3 \end{cases}$ weil $\sin(k\pi) = 0$ $k \in \mathbb{N}$, $\sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ $k \in \mathbb{N}$, $\sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = -1$ $k \in \mathbb{N}$

i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann ist $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt ...$(a$

3 $\iff \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_n$: $a_{n_k} \to a$

oder

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ unendlich viele n : $|a_n - a| < \varepsilon$

ii) HP: $\{0, 1, 2\}$

1

iii) 1) $n_k = 2k \implies a_{n_k} = 1 + \frac{1}{2k} - \sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2k} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

3

2) $n_k = 4k+1 \implies a_{n_k} = 1 + \frac{1}{4k+1} - \sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right) = \frac{1}{4k+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

3) $n_k = 4k+3 \implies a_{n_k} = 1 + \frac{1}{4k+3} - \sin\left(\frac{(4k+3)\pi}{2}\right) = 2 + \frac{1}{4k+1} \xrightarrow{n\to\infty} 2$

3. i) zeige monotonie per vollst. Ind. (d.h. $b_n > b_{n+1}$)
5

IA: $n=0$ $\quad b_0 = 10 > 6 = b_1$

IS: zz $b_{n+1} \leq b_n$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{b_n - 1} \leq b_n$

$\Leftrightarrow b_n - 1 \leq \frac{1}{4} \cdot b_n^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq b_n^2 - 4b_n + 4$

$b_{n_{1,2}} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$ $\quad$ somit Polynom $x \mapsto x^2 - 4x + 4$ hat Nullstelle in 2, ist konvex also immer pos.

somit haben wir gezeigt (b_n) mon fallend

Beschränktheit: nach oben beschränkt mit $b_0 = 10$ weil mon. fallend.

zz nach unten beschränkt mit 2 beschränkt.

per Ind: $b_n \geq 2$

IA: ✓

IS: $b_n \geq 2 \Rightarrow b_{n+1} \geq 2$

$b_{n+1} = 2\sqrt{\underbrace{b_n}_{\geq 2} - 1} \geq 2\sqrt{2-1} = 2$

somit (b_n) beschränkt mit 2, 10.

Da monotone & beschränkte Folge (b_n) konvergent wissen wir

ii) es gibt einen Grenzwert für diesen gilt: $b = 2\sqrt{b-1}$ $\quad$ 1

$b = 2$

2

ja ein Grenzwert ist auch ein Häufungspunkt weil die Teilfolge mit $\quad$ 1

~~0~~ $n_k = k$ also $b_{n_k} = b_k$ konvergiert.