1.) Man berechne mittels partieller Integration $\int x^2 e^x dx$. (5 Punkte)

Lösung:

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx =$$

$$= x^2e^x - \int \underbrace{2x}_{u}\, \underbrace{e^x}_{v'} dx = x^2e^x - (2xe^x -$$

$$- \int 2e^x dx) = \underline{\underline{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C,\ C \in \mathbb{R}}}$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C) =$$

$$= 2xe^x + x^2e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x =$$

$$= \underline{x^2e^x}$$

2.) Man bestimme die Funktionalmatrix zu $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 \cdot y^x \\ \frac{y}{z \cdot x^2} \end{pmatrix}, \quad y > 0, \ x \neq 0, \ z \neq 0.$$

(5 Punkte)

Lösung: Wir setzen $f_1(x,y,z) = z^2 \cdot y^x$, $f_2(x,y,z) = \frac{y}{z \cdot x^2}$ und berechnen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial (z^2 \cdot e^{x \ln y})}{\partial x} = z^2 \cdot \ln y \cdot e^{x \ln y} = z^2 \cdot \ln y \cdot y^x$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = z^2 \cdot x \cdot y^{x-1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 2z \cdot y^x,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial (y \cdot z^{-1} \cdot x^{-2})}{\partial x} = -2 \cdot y \cdot z^{-1} \cdot x^{-3} = \frac{-2y}{z \cdot x^3}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1}{z \cdot x^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = -1 \cdot y \cdot z^{-2} \cdot x^{-2} = \frac{-y}{z^2 \cdot x^2}$$

Also haben wir als Funktionalmatrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 \cdot \ln y \cdot y^x, & z^2 \cdot x \cdot y^{x-1}, & 2z \cdot y^x \\ \frac{-2y}{z \cdot x^3}, & \frac{1}{z \cdot x^2}, & \frac{-y}{z^2 \cdot x^2} \end{pmatrix}$$

3.) Man bestimme alle Punkte der Kurve

$$2x^2 - 4xy + 9y^2 = 36,$$

in denen die Tangenten den Anstieg 1 haben.

(5 Punkte)

Lösung: Wir setzen $F(x,y) = 2x^2 - 4xy + 9y^2 - 36$.

Für eine durch $F(x,y) = 0$ implizit definierte Funktion $y = y(x)$ gilt dann:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x - 4y}{-4x + 18y} = \frac{2y - 2x}{9y - 2x}.$$

Die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 1$ liefert daher

$$2y - 2x = 9y - 2x, \quad \text{also } y = 0.$$

Einsetzen in $F(x,y) = 0$ ergibt

$$2x^2 - 36 = 0, \quad \text{also } 2x^2 = 36 = 4 \cdot 9,$$

$$x^2 = 2 \cdot 9, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \cdot \sqrt{9} = \pm 3\sqrt{2}.$$

Dies liefert die beiden Punkte

$$P_1 = (3\sqrt{2}, 0), \quad P_2 = (-3\sqrt{2}, 0).$$

4.) Man untersuche das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad (5 \text{ Punkte})$$

<u>**Lösung:**</u> Wir berechnen zunächst das <u>unbestimmte Integral:</u> Substitution $\ln x = t$ liefert $\frac{1}{x}dx = dt$, also

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2}.$$

Daraus ergibt sich der <u>Grenzwert:</u>

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{c\to\infty} \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^c =$$

$$\underset{(\text{wegen } \ln 1 = 0)}{=} \lim_{c\to\infty}\frac{\ln^2 c}{2} = \infty,$$ also ist

das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$ divergent.