Satz (Satz von Schwarz):

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ offene Menge,

$f: D \to \mathbb{R}$ Fkt.: $f_{xy}$ und $f_{yx}$ existieren in $D$ und sind stetig

$\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$.

---

Allg.: Ist $f$ $m$-mal stetig partiell differenzierbar in $D$ $\Rightarrow$ partielle Ableitungen bis zur $m$-ten Ordnung unabhängig von Reihenfolge der Differentiation.

---

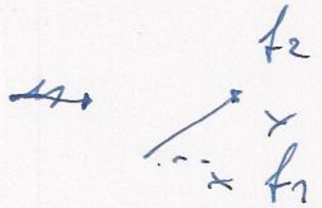
Beweis: "geschickte" Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

Def (Partielle Ableitungen einer vektorwertigen Flt.):

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Menge

$\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$ vektorwertige Flt.,

also $\vec{f}(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ f_2(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$




$\vec{f}$ partiell differenzierbar

$\Leftrightarrow$

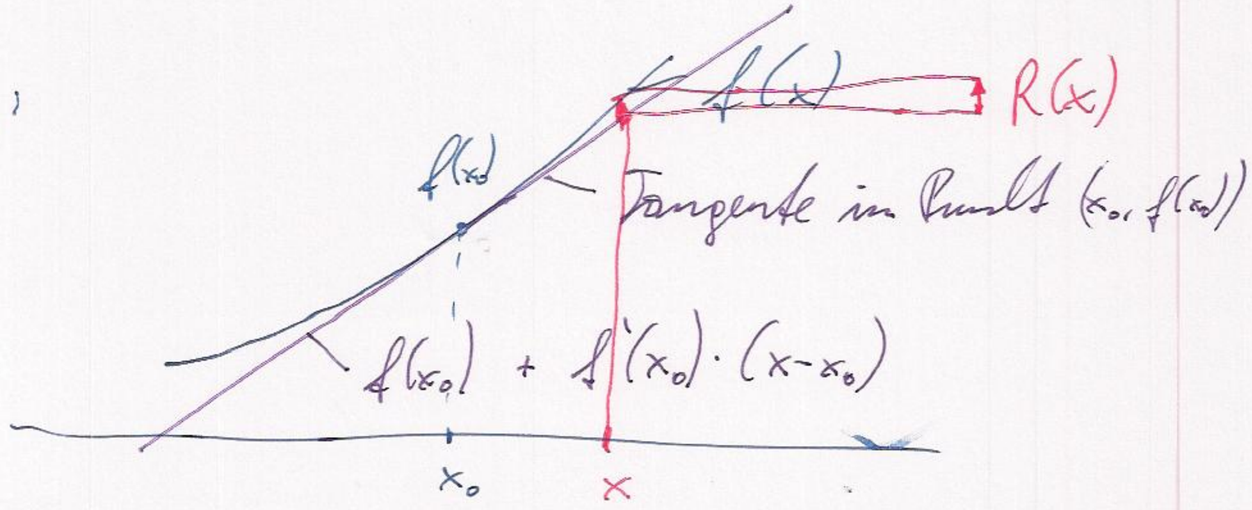
$f_1, f_2, \dots, f_m$ partiell differenzierbar

Partielle Ableitung:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}, \quad k = 1,\dots,n$$

# Differentialrechnung in mehreren Variablen

1 Var.:




$f$ differenzierbar an Stelle $x_0$

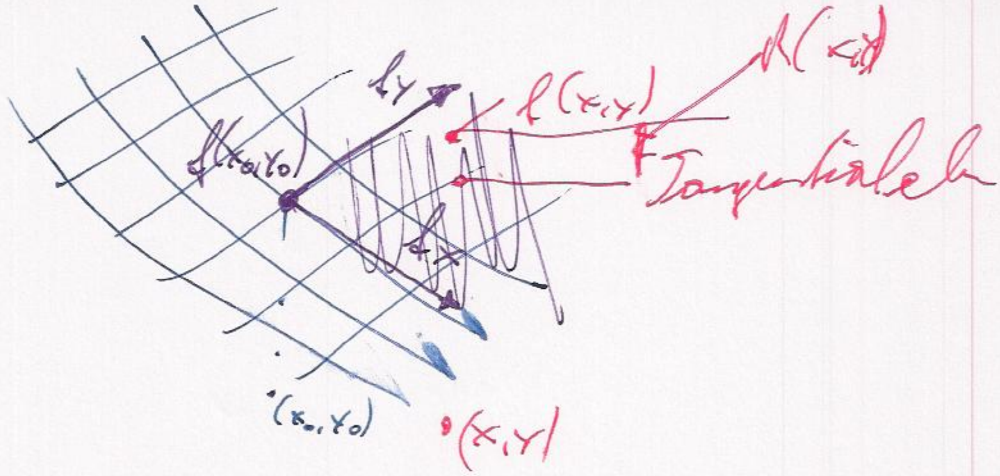
$\Updownarrow$

$f$ kann "gut" durch Tangente approximiert werden:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\text{Tangente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Fehler}}}$$

mit $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0}$ $\quad R(x) = o(x-x_0)$

$= o(\Delta x)$




2 Var.: $f(x,y)$ durch Tangentialebene approximieren:

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}_{\text{Tangentialebene}} + R(x,y)$$

$R(x,y)$ ↝ Fehler

$f$ differenzierbar bei $(x_0,y_0)$

$\Updownarrow$

Fehler $R(x,y)$ „klein":

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\|R(x,y)\|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

$\Rightarrow$ Totale Ableitung

**Def.:** $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,

$\vec{f} : D \to \mathbb{R}^m$ heißt in $\vec{x}_0 \in D$

**total differenzierbar,**

falls <u>eine lineare Abbildung</u>

$$\vec{f}\,' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

existiert, sodaß:

$$\boxed{\vec{f}(\vec{x}) = \overbrace{\vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{f}\,'(\vec{x}-\vec{x}_0)}^{\text{"entspricht" Tangentialraum}} + \underbrace{\vec{R}(\vec{x})}_{\text{Fehler}}},$$

wobei Rest $\vec{R}(\vec{x})$ erfüllt:

$$\boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\|\vec{R}(\vec{x})\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.}$$

Lineare Abbildung $\vec{f}'$ heißt
<u>Ableitung von $\vec{f}$ im Punkt $\vec{x}_0$.</u>

Zugehörige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
heißt: <u>Jacobi-Matrix</u> (= <u>Funktionalmatrix</u>).

---

Frage: Wie <u>sieht $\vec{f}'$</u> aus?
(bzw. <u>Matrix A</u>)

Bsp.: $n=2$ : $m=1$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f$ total differenzierbar bei $(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow f(x,y) = f(x_0,y_0) + \overbrace{(a,b)}^{A} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + R(x,y)$$

Fehler $R(x,y)$ „klein"

$y = y_0$

$$f(x,y_0) = f(x_0,y_0) + (a,b) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + R(x,y_0)$$

$$= f(x_0,y_0) + a\cdot(x-x_0) + b\cdot 0 + R(x,y_0)$$

$$= \boxed{f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + R(x,y_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0} = a + \frac{R(x,y_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0} = a + \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{R(x,y_0)}{x-x_0}}_{= 0}$$

$$= \boxed{f_x(x_0,y_0)}$$

analog: $b = f_y(x_0, y_0)$

Jacobi-Matrix

$$A = \left( f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0) \right)$$

---

$n=2, m=1$:

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + A \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R(x,y) =$$

$$= \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x \cdot (x - x_0) + f_y \cdot (y - y_0)}_{\text{Tangentialebene}} + R(x,y)$$

Wie sieht Matrix A bei skalarwert. Fkt. aus:

Jacobi-Matrix (= Funktionalmatrix)

$$A = \left( f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n} \right) = (\operatorname{grad} f)^T$$

---

$\Rightarrow$

**Satz:** $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge

skalarwertige

$f : D \to \mathbb{R}^n$ total differenzierbare Fkt.

$\Rightarrow$ Jacobi-Matrix $A$ (der Ableitung von $f$)

$=$ Transponierte des Gradienten von $f$

$\Rightarrow$

Matrizenprodukt

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\operatorname{grad} f)^T \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + R(\vec{x})$$

$$= f(\vec{x}_0) + \operatorname{grad} f \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + R(\vec{x}),$$

Skalarprodukt

mit $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \dfrac{R(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$

**Def.:** $D \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge

$f : D \to \mathbb{R}$ total differenzierbare Fkt.

Vektor:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt: Gradient von $f$

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$\underbrace{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)}_{\Delta f} \approx \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$= f_{x_1}(\vec{x}_0) \cdot (x_1 - x_{0,1}) + f_{x_2} \cdot (x_2 - x_{0,2}) + \dots + f_{x_n} \cdot (x_n - x_{0,n})$$

$$= \begin{pmatrix} f_{x_1}(\vec{x}_0) \\ f_{x_2}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - x_{0,1} \\ x_2 - x_{0,2} \\ \vdots \\ x_n - x_{0,n} \end{pmatrix}}_{\Delta \vec{x}}$$

$$\Rightarrow \Delta f \approx \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \cdot \Delta \vec{x}$$

---

("Grenzübergang")

$$df = \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \cdot d\vec{x} =$$

$$\underbrace{= f_{x_1}(\vec{x}_0) \cdot dx_1 + f_{x_2}(\vec{x}_0) \cdot dx_2 + \dots + f_{x_n}(\vec{x}_0) \cdot dx_n}$$

vollständiges Differential von $f$ an Stelle $\vec{x}_0$

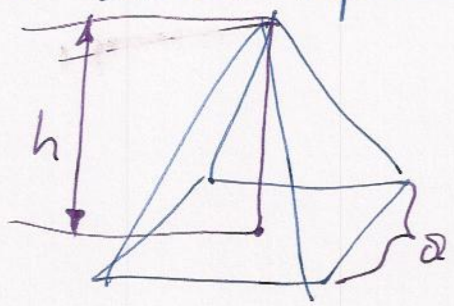
# Vollständiges Differential:

Wie ändert sich f, wenn sich $\vec{x}$ (wenig) ändert?

Näherungsweise mittels vollst. Differential beschreiben.

---

Bsp.: Volumen einer quadrat. Pyramide:




$$V(a,h) = \frac{a^2 \cdot h}{3}$$

$$dV = V_a \cdot da + V_h \cdot dh$$

$$\Delta V \approx V_a \cdot \Delta a + V_h \cdot \Delta h$$

$$V_a = \frac{2a \cdot h}{3}, \quad V_h = \frac{a^2}{3}$$

---

$a = 50\,mm$, $h = 30\,mm$, | $\Delta a = 1\,mm$, $\Delta h = -1\,mm$

$$\Delta V \approx \frac{2 \cdot 50 \cdot 30}{3} \cdot 1 + \frac{50^2}{3} \cdot (-1)$$

**Satz:** Jede <u>total differenzierbare</u> Fkt. ist stetig.

Beweis (skalarwert. Fkt., $n=2$):

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + A \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + R(\vec{x})$$

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0}$$

$$\boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)} + 0 + 0$$

Vektorwertige Fkt.: $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$

Satz: Ist $\vec{f}$ total differenzierbar,

$\Rightarrow$ $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})$ (Koordinatenfkt.) total differenzierbar.

Einträge der Jacobi-Matrix $A$ sind die partiellen Ableitungen der Koordinatenfkt.:

$$A = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

---

$\Rightarrow$ Jede total differenzierbare Fkt. ist partiell differenzierbar

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n)\\ f_2(x_1,\dots,x_n)\\ \vdots\\ f_m(x_1,\dots,x_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_{0,1},\dots,x_{0,n})\\ f_2(x_{0,1},\dots,x_{0,n})\\ \vdots \\ f_m(x_{0,1},\dots,x_{0,n})\end{pmatrix} +$$

$$+ \underbrace{A}_{\text{Jacobi-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1-x_{0,1}\\ x_2-x_{0,2}\\ \vdots \\ x_n-x_{0,n}\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} R_1(x_1,\dots,x_n)\\ R_2(x_1,\dots,x_n)\\ \vdots\\ R_m(x_1,\dots,x_n)\end{pmatrix}}_{\text{Fehler}}$$

Ableitungsregeln:

- Summenregel: $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

  $\vec{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\Rightarrow \left(\vec{f} + \vec{g}\right)' = \vec{f}\,' + \vec{g}\,'$$

Jacobi-Matrizen

$$C = A + B$$

- Produktregel (skalarwertige Fkt.)

  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Menge

  $f, g$ : total differenzierbare skalarwertige Fkt.

sei: $h(\vec{x}) = f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{grad} h(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) \cdot \operatorname{grad} g(\vec{x}_0) + g(\vec{x}_0) \cdot \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} h_{x_1} \\ h_{x_2} \\ \vdots \\ h_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1} \cdot g + f \cdot g_{x_1} \\ f_{x_2} \cdot g + f \cdot g_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \cdot g + f \cdot g_{x_n} \end{pmatrix}$$

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\begin{cases} (f(x,y)\cdot g(x,y))_x = f_x\cdot g + f\cdot g_x \\ (f(x,y)\cdot g(x,y))_y = f_y\cdot g + f\cdot g_y \end{cases}$$

$$((f\cdot g)_x, (f\cdot g)_y) = (f_x\cdot g + f\cdot g_x,\; f_y\cdot g + f\cdot g_y)$$

Kettenregel (skalarwertige Fkt.):

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Menge

$f: D \to \mathbb{R}$, $\vec{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

mit $\vec{g}(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$, $\vec{g}(\mathbb{R}) \subseteq D$.

$$F(x) = f(\vec{g}(x)) =$$

$$= f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$$
$$[f(u_1, u_2, \dots, u_n)]$$

$$\Longrightarrow F'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(g_1(x), \dots, g_n(x)) \cdot g_i'(x)$$

Leibniz-Notation: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial g_i} \cdot \dfrac{dg_i}{dx}$

Bsp.: $\boxed{f(u,v) = u^2 \cdot v + u \cdot v}$

$u = g_1(x) = \ln x$

$v = g_2(x) = x^2$

$$F(x) = f(g_1(x), g_2(x)) =$$

$$(\ln x)^2 \cdot x^2 + \ln x \cdot x^2$$

---

Kettenregel:

$$F'(x) = f_u \cdot \frac{du}{dx} + f_v \cdot \frac{dv}{dx}$$

$f_u = 2u \cdot v + v$ | $u = \ln x$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ | $v = x^2$, $\frac{dv}{dx} = 2x$

$f_v = u^2 + u$

$$F'(x) = (2u \cdot v + v) \cdot \frac{1}{x} + (u^2 + u) \cdot 2x =$$

$$= (2 \cdot \ln x \cdot x^2 + x^2) \cdot \frac{1}{x} + ((\ln x)^2 + \ln x) \cdot 2x$$

Probe: $\left((\ln x)^2 \cdot x^2 + \ln x \cdot x^2\right)' =$

....

Kettenregel für vektorwertige Fkt.:

$$\vec{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p,$$

$$\vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \text{ also: } \vec{g}(\vec{x}) = \left(g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x})\right)$$

$$(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x}) = \vec{f}\left(g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x})\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(\vec{f} \circ \vec{g})}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{g}}\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right) \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0)$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$\underbrace{C \;=\; A \cdot B}_{\text{Matrizenmultiplikation der Jacobi-Matrizen}}$$

Falls $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ total differenzierbar und bijektiv

$\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{f}^{-1}}{\partial \vec{x}}(\vec{y}_0) = \underbrace{\left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) \right)^{-1}}_{\updownarrow}$$

$$A^{-1}$$

Jacobi-Matrix von $\vec{f}^{-1}$

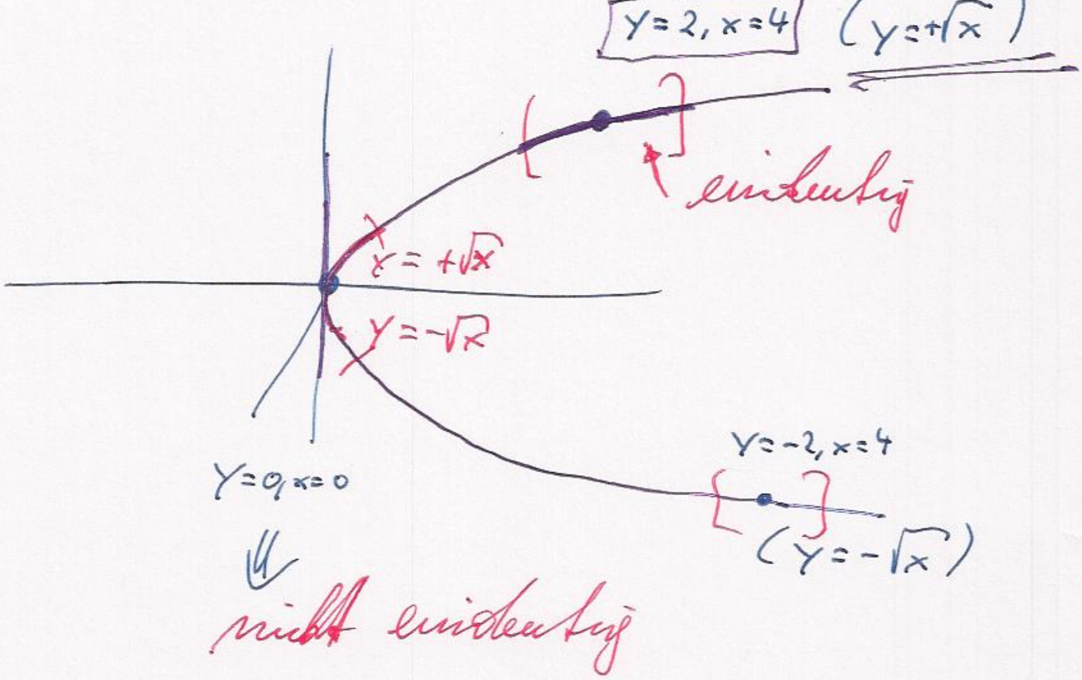
= Inverse der Jacobi-Matrix von $\vec{f}$

Wann lässt sich Gleichung

$$F(x,y) = 0$$

eindeutig nach $y$ auflösen?

Bsp.: $F(x,y) = y^2 - x = 0 \quad (\Leftrightarrow y^2 = x)$




Satz (Hauptsatz über implizite Fkt.):

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ offene Menge

$F: D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Fkt.

$F(x_0, y_0) = 0$ , $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

$\Rightarrow$ $\exists$ Umgebung $U$ von $(x_0, y_0)$:

Glg. $F(x, y) = 0$ besitzt in $U$

eindeutig bestimmte Lsg $y(x)$.

$y(x)$ ist stetig differenzierbar und:

$$y'(x) = - \frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

Beweis des letzten Teils:

$$F(x, y(x)) = 0$$

$$\cancel{F} \quad \frac{\partial F}{\partial x} =$$

$$F_x \cdot \frac{dx}{dx} + F_y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d0}{dx}$$

$$F_x \cdot 1 + F_y \cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = -\frac{F_x}{F_y}}$$