5. Vereinfachen von Funktionen

- Irrelevante Variablen werden eliminiert
- Anwendung z.B. bei Minimierung von Schaltungen
- Grundsätzlich durch Umformungen (anhand der Gesetze) möglich
  - Ergebnisse sind aber nicht immer minimal!

- → Systematisches Vorgehen sinnvoll/erforderlich
- Zwei Minimierungsverfahren werden im Folgenden vorgestellt:
  - Karnaugh & Veitch (K&V)
  - Quine-McCluskey (Q-MC)

5. Vereinfachen von Funktionen

Verfahren nach Quine und McCluskey

- Es wird von der disjunktiven Normalform ausgegangen und versucht, durch geschicktes Kombinieren Terme der Art $(x \vee \neg x)$ zu erzeugen.
- Diese fallen dann weg, da sie dem logischen Wert 1 entsprechen und in einer Konjunktion vorkommen.
- Beispiel:

$$\begin{aligned}
f_B(e_1, e_2, e_3, e_4) = \\
&(\ e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee \\
&(\ e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \vee \\
&(\ e_1 \wedge \neg e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4) \vee \\
&(\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee \\
&(\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \vee \\
&(\neg e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge e_4) \vee \\
&(\neg e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4) \vee \\
&(\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee \\
&(\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4)
\end{aligned}$$

5. Vereinfachen von Funktionen

Verfahren nach Quine und McCluskey

- Erster Schritt: Gruppenbildung nach (steigender) Anzahl der enthaltenen Negationen

	Zeile	Gruppe					
K1	1	1	e_1	$\neg e_2$	e_3	e_4	1 Negation
K2	2		$\neg e_1$	e_2	e_3	e_4	
K3	3	2	e_1	$\neg e_2$	e_3	$\neg e_4$	2 Negationen
K4	4		$\neg e_1$	e_2	e_3	$\neg e_4$	
K5	5		$\neg e_1$	e_2	$\neg e_3$	e_4	
K6	6		$\neg e_1$	$\neg e_2$	e_3	e_4	
K7	7	3	e_1	$\neg e_2$	$\neg e_3$	$\neg e_4$	3 Negationen
K8	8		$\neg e_1$	e_2	$\neg e_3$	$\neg e_4$	
K9	9	4	$\neg e_1$	$\neg e_2$	$\neg e_3$	$\neg e_4$	4 Negationen

5. Vereinfachen von Funktionen

Verfahren nach Quine und McCluskey

- Zweiter Schritt: Zusammenfassen von Termen benachbarter Gruppen

Zeile	Gruppe				
1	1	e_1	$\neg e_2$	e_3	e_4
2		$\neg e_1$	e_2	e_3	e_4
3	2	e_1	$\neg e_2$	e_3	$\neg e_4$
4		$\neg e_1$	e_2	e_3	$\neg e_4$
5		$\neg e_1$	e_2	$\neg e_3$	e_4
6		$\neg e_1$	$\neg e_2$	e_3	e_4
7	3	e_1	$\neg e_2$	$\neg e_3$	$\neg e_4$
8		$\neg e_1$	e_2	$\neg e_3$	$\neg e_4$
9	4	$\neg e_1$	$\neg e_2$	$\neg e_3$	$\neg e_4$

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{: } (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \\ 3\text{: } (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \end{array}\right\} (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{: } (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \\ 6\text{: } (\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \end{array}\right\} (\neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\text{: } (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \\ 4\text{: } (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \end{array}\right\} (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\text{: } (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \\ 5\text{: } (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge e_4) \end{array}\right\} (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_4)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\text{: } (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \\ 6\text{: } (\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \end{array}\right\} (\neg e_1 \wedge e_3 \wedge e_4)$$

Keine Vereinfachung bei z.B.: 1–4

$$\begin{array}{l} 1\text{: } (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \\ 4\text{: } (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \end{array}$$

5. Vereinfachen von Funktionen

Verfahren nach Quine und McCluskey

- Nach der ersten Vereinfachung:

Zeilen				
1,3	e_1	$\neg e_2$	e_3	
1,6		$\neg e_2$	e_3	e_4
2,4	$\neg e_1$	e_2	e_3	
2,5	$\neg e_1$	e_2		e_4
2,6	$\neg e_1$		e_3	e_4
3,7	e_1	$\neg e_2$		$\neg e_4$
4,8	$\neg e_1$	e_2		$\neg e_4$
5,8	$\neg e_1$	e_2	$\neg e_3$	
7,9		$\neg e_2$	$\neg e_3$	$\neg e_4$
8,9	$\neg e_1$		$\neg e_3$	$\neg e_4$

Ist ein Term in keiner Vereinfachung enthalten, muss dieser ebenfalls übernommen werden!

5. Vereinfachen von Funktionen

Verfahren nach Quine und McCluskey

Zeile				
2,4	$\neg e_1$	e_2	e_3	
1,3	e_1	$\neg e_2$	e_3	
5,8	$\neg e_1$	e_2	$\neg e_3$	
1,6		$\neg e_2$	e_3	e_4
7,9		$\neg e_2$	$\neg e_3$	$\neg e_4$
2,5	$\neg e_1$	e_2		e_4
3,7	e_1	$\neg e_2$		$\neg e_4$
4,8	$\neg e_1$	e_2		$\neg e_4$
2,6	$\neg e_1$		e_3	e_4
8,9	$\neg e_1$		$\neg e_3$	$\neg e_4$

$\Rightarrow$

Zeile				
2,4/5,8	$\neg e_1$	e_2		
1,3	e_1	$\neg e_2$	e_3	
1,6		$\neg e_2$	e_3	e_4
7,9		$\neg e_2$	$\neg e_3$	$\neg e_4$
2,5/4,8	$\neg e_1$	e_2		
3,7	e_1	$\neg e_2$		$\neg e_4$
2,6	$\neg e_1$		e_3	e_4
8,9	$\neg e_1$		$\neg e_3$	$\neg e_4$

- Der zweifach auftretende Term $(\neg e_1 \land e_2)$ kann einmal gestrichen werden.

Zeile				
2,4/5,8	$\neg e_1$	e_2		
1,3	e_1	$\neg e_2$	e_3	
1,6		$\neg e_2$	e_3	e_4
7,9		$\neg e_2$	$\neg e_3$	$\neg e_4$
3,7	e_1	$\neg e_2$		$\neg e_4$
2,6	$\neg e_1$		e_3	e_4
8,9	$\neg e_1$		$\neg e_3$	$\neg e_4$

Reduzierte Terme:

$$R_1 = (\neg e_1 \land e_2)$$
$$R_2 = (e_1 \land \neg e_2 \land e_3)$$
$$R_3 = (\neg e_2 \land e_3 \land e_4)$$
$$R_4 = (\neg e_2 \land \neg e_3 \land \neg e_4)$$
$$R_5 = (e_1 \land \neg e_2 \land \neg e_4)$$
$$R_6 = (\neg e_1 \land e_3 \land e_4)$$
$$R_7 = (\neg e_1 \land \neg e_3 \land \neg e_4)$$

5. Vereinfachen von Funktionen

Verfahren nach Quine und McCluskey

- $R_1 = (\neg e_1 \wedge e_2)$, kann aus den Vollkonjunktionen K_2, K_4, K_5 und K_8 erzeugt werden

R_1	$=$	$\neg e_1$	e_2		

K_1	$=$	e_1	$\neg e_2$	e_3	e_4
K_2	$=$	$\neg e_1$	e_2	e_3	e_4
K_3	$=$	e_1	$\neg e_2$	e_3	$\neg e_4$
K_4	$=$	$\neg e_1$	e_2	e_3	$\neg e_4$
K_5	$=$	$\neg e_1$	e_2	$\neg e_3$	e_4
K_6	$=$	$\neg e_1$	$\neg e_2$	e_3	e_4
K_7	$=$	e_1	$\neg e_2$	$\neg e_3$	$\neg e_4$
K_8	$=$	$\neg e_1$	e_2	$\neg e_3$	$\neg e_4$
K_9	$=$	$\neg e_1$	$\neg e_2$	$\neg e_3$	$\neg e_4$

5. Vereinfachen von Funktionen

Verfahren nach Quine und McCluskey

- Dritter Schritt: Streichen unnötiger reduzierter Terme
- $f_B = K_1 \vee K_2 \vee \cdot \cdot \cdot \vee K_9$; die K_i $(i = 1, 2, ..., 9)$ stehen für die Vollkonjunktionen der disjunktiven Normalform nach Schritt 1

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9
R_1		X		X	X			X	
R_2	X		X						
R_3	X					X			
R_4							X		X
R_5			X				X		
R_6		X				X			
R_7								X	X

5. Vereinfachen von Funktionen

Verfahren nach Quine und McCluskey

- R_1 ist unentbehrlich, da nur er die Vollkonjunktionen K_4 und K_5 ersetzt

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9
R_1		X		X	X			X	
R_2	X		X						
R_3	X					X			
R_4							X		X
R_5			X				X		
R_6		X				X			
R_7								X	X

5. Vereinfachen von Funktionen

Verfahren nach Quine und McCluskey

- Bei den verbleibenden reduzierten Termen handelt es sich durchwegs um gleich stark reduzierte Terme (jeweils in einer Variable reduziert)

- Es gilt daher, die minimale Kombination von 2 oder mehr reduzierten Termen zu finden, sodass alle verbliebenen K_i abgedeckt werden

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9
R_1		X		X	X			X	
R_2	X		X						
R_3	X					X			
R_4							X		X
R_5			X				X		
R_6		X				X			
R_7								X	X

- → Mehrere Lösungen!

5. Vereinfachen von Funktionen

Verfahren nach Quine und McCluskey

- Lösung (1): R_2, R_3 und R_4 werden übernommen

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9
R_1		X		X	X			X	
R_2	X		X						
R_3	X					X			
R_4							X		X
R_5			X				X		
R_6		X				X			
R_7								X	X

$$
\begin{aligned}
f_B &= R_1 \vee R_2 \vee R_3 \vee R_4 = \\
&\quad (\neg e_1 \wedge e_2) \vee \\
&\quad (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3) \vee \\
&\quad (\neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee \\
&\quad (\neg e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4)
\end{aligned}
$$

5. Vereinfachen von Funktionen

Verfahren nach Quine und McCluskey

- Lösung (2): R_2, R_4 und R_6 werden übernommen

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9
R_1		X		X	X			X	
R_2	X		X						
R_3	X					X			
R_4							X		X
R_5			X				X		
R_6		X				X			
R_7								X	X

$$
\begin{aligned}
f_B \; = \; & R_1 \vee R_2 \vee R_4 \vee R_6 = \\
& (\neg e_1 \wedge e_2) \vee \\
& (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3) \vee \\
& (\neg e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4) \vee \\
& (\neg e_1 \wedge e_3 \wedge e_4)
\end{aligned}
$$

Gibt es weitere Lösungen?