

Einführung in die Elektrotechnik

Übungsbeispiele 2021S (Beispiele 2020 1-18)

Daniel Schloms

Juni 2021

1 Komplexe Zahlen

1.1 Zahlen in Polarform

Komplexe Zahl $z = a + j \cdot b$

Polarform: $z = r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$

Radius $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Winkel $\varphi = \operatorname{atan}(\frac{b}{a})$... Achtung wo der Zeiger im Einheitskreis liegt!

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot (\cos(-\frac{\pi}{4}) + j \cdot \sin(-\frac{\pi}{4})) \quad (1)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{3\pi}{4}) + j \cdot \sin(\frac{3\pi}{4})) \quad (2)$$

$$z_3 = \sqrt{2} \cdot (\cos(-\frac{3\pi}{4}) + j \cdot \sin(-\frac{3\pi}{4})) \quad (3)$$

$$z_4 = \frac{1}{j} = 0 - j = 1 \cdot (\cos(-\frac{\pi}{2}) + j \cdot \sin(-\frac{\pi}{2})) \quad (4)$$

1.2 Zahlen als Komplexe Zeiger

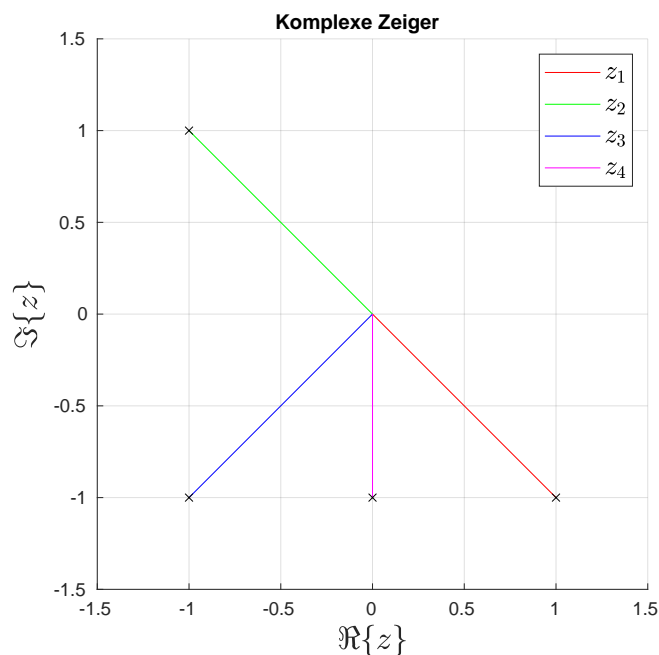


Abbildung 1: Komplexe Zeiger

1.3 Multiplikation & Division

Multiplikation: $z_i \cdot z_j = (a_i a_j - b_i b_j) + i \cdot (a_i b_j + a_j b_i)$

Division: $\frac{z_i}{z_j} = \frac{1}{z_j \cdot \overline{z_j}} \cdot (z_i \cdot \overline{z_j})$

$$z_1 \cdot z_2 = 0 + 2j \quad (5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -1 + 0j \quad (6)$$

$$z_1 \cdot z_3 = -2 + 0j \quad (7)$$

$$\frac{z_1}{z_3} = 0 + 1j \quad (8)$$

$$z_1 \cdot z_4 = -1 - 1j \quad (9)$$

$$\frac{z_1}{z_4} = 1 + 1j \quad (10)$$

$$\frac{z_3}{z_4} = 1 - 1j \quad (11)$$

2 LTI-System

Bei der Blackbox kann es sich um ein LTI-System handeln, wenn ein um k skaliertes und um T verzögertes Eingangssignal ein um k skaliertes und um T verzögertes Ausgangssignal bewirkt (Bzgl. Skalierung: Homogenität).

$$k \cdot u(t - T) \rightarrow k \cdot y(t - T) \quad (12)$$

Außerdem müssen zwei addierte Ursachen auch die addierte Wirkung mit sich bringen (Additivität).

$$u_1 + u_2 \rightarrow y_1 + y_2 \quad (13)$$

Aus diesen zwei Voraussetzungen folgt der Überlagerungssatz (Homogenität+Additivität), werden zwei um a und b skalierte Eingangssignale addiert bewirkt dies ein Ausgangssignal, welches aus den skalierten Ausgangssignalen der einzelnen Eingangssignale zusammengesetzt ist (inklusive Voraussetzung für Zeitinvarianz in diesem Beispiel).

$$a \cdot u_1(t - T_1) + b \cdot u_2(t - T_2) \rightarrow a \cdot y_1(t - T_1) + b \cdot y_2(t - T_2) \quad (14)$$

Mit diesem Wissen kann man nun mit den Sinusgeneratoren am Eingang folgende Signale anlegen und die Ausgangssignale mit einem Oszilloskop aufzeichnen aufzeichnen:

- Beliebige Signal $u_1 \rightarrow y_1$
- Beliebige Signal $u_2 \rightarrow y_2$
- u_1 um a skaliert: $a \cdot u_1 \rightarrow y_3$
- u_2 um b skaliert: $b \cdot u_2 \rightarrow y_4$
- u_1 und u_2 skaliert & addiert: $a \cdot u_1 + b \cdot u_2 \rightarrow y_5$

Nun muss überprüft werden, ob die vorhin genannten Kriterien erfüllt werden.

$$y_3 = a \cdot y_1 \quad (15)$$

$$y_4 = b \cdot y_2 \quad (16)$$

$$y_5 = a \cdot y_1 + b \cdot y_2 \quad (17)$$

Zeitinvarianz ist mit diesen Messungen ebenfalls plausibel, da eine interne Zeitabhängigkeit ja auch den Ausgang beeinflussen würde.

3 Oszilloskop-Bild

3.1 Kosinus-Funktion

Eine Kosinus-Funktion lässt sich im Allgemeinen folgendermaßen anschreiben:

$$u(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (18)$$

Die Amplitude A kann leicht durch Zählen der Divisions herausgefunden werden:

$$\frac{0.5V}{\text{div}} \cdot 5 \text{ divs} = 2.5V \quad (19)$$

Die Phasenverschiebung φ kann ebenfalls leicht berechnet werden. Die Funktion soll so weit nach rechts verschoben werden, dass zur Zeit $t = 0$ der Kosinus des Phasenwinkels $\cos(\varphi) = \frac{2}{5}$ ergibt. Betrachtet man den Einheitskreis, so ist dies für zwei Winkel der Fall, jeweils ein positiver und ein negativer Winkel im rechten Halbkreis. Trivialerweise wählt man den negativen Winkel, da die Funktion zu diesem Zeitpunkt noch ansteigt. Mathematisch betrachtet wertet man die Ableitung zum Zeitpunkt 0 aus:

$$\frac{d}{dt}(u(t)) = -2.5 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot \sin(\varphi)|_{t=0} \quad (20)$$

Damit die Ableitung zur Zeit $t = 0$ positiv ist, muss die Phasenverschiebung φ somit negativ sein. Dadurch ist $\varphi = -\arccos(\frac{2}{5})$. Die Funktion ist somit:

$$u(t) = 2.5 \cdot \cos(\omega t - \arccos(\frac{2}{5})) \quad (21)$$

3.2 Frequenz

Die Frequenz f kann ebenfalls sehr leicht ausgerechnet werden. Durch Nachzählen der Divisions erkennt man, dass genau 3 Perioden in $100\mu s$ passen. Daher ist die Frequenz:

$$\omega = \frac{3}{100\mu s} = \frac{30}{1ms} = \frac{30000}{1s} = 30kHz \quad (22)$$

Mit der Frequenz f kann die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ errechnet werden, wodurch sich die entgeltige Funktion ergibt.

$$u(t) = 2.5 \cdot \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot t - a\cos(\frac{2}{5})) \quad (23)$$

4 Einschaltvorgang

4.1 Spannungsabfall unmittelbar nach Einschalten

Der Einschaltvorgang am Kondensator kann durch

$$u_c(t) = U \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (24)$$

beschrieben werden. Die Zeitkonstante τ ist in diesem Fall (aus Sicht der Klemmen am Kondensator) $(R_1 || R_2)C$.

Wird für $t = 0$ eingesetzt, so ist die Spannung u_c am Kondensator 0 (Kurzschluss). Dadurch wird der Widerstand R_2 überbrückt, es fallen 0V an ihm ab. Dies kann durch die Maschenregel begründet werden, wenn C_1 durch einen Kurzschluss ersetzt wird, so muss die kumulative Spannung in der rechten Masche 0 ergeben und somit fällt keine Spannung am Widerstand ab.

4.2 Spannungsabfall nach Anstiegszeit

Wenn in Gleichung 24 t gegen unendlich geht, bzw. sehr groß wird, so geht die Spannung am Kondensator gegen einen konstanten Wert (da $e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow 0$). Dadurch geht die zeitliche Änderung der Spannung gegen 0 ($\frac{du_c(t)}{dt} \rightarrow 0$). Damit fließt kein Strom über den Kondensator ($i_c(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$), wodurch der Kondensator mit einer Unterbrechung ersetzt werden kann. Das heißt, dass an den Widerständen R_1 und R_2 jeweils 5V abfallen (Maschenregel + Spannungsteilerregel).

5 Diskrete Faltung

Definition diskrete Faltung:

$$(g * h)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g[k]h[n - k] \quad (25)$$

Funktionen g, h :

$$g[n] = \dots, 0, 0, 2, -1, 1, 0, 0, \dots \quad (26)$$

$$h[n] = \dots, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, \dots \quad (27)$$

$$x[n] = (g * h)[n] \quad (28)$$

In der folgenden Tabelle 5 wird dargestellt wie h gespiegelt gegen g verschoben wird. In der letzten Spalte kann das Ergebnis der Faltung abgelesen werden. Es wird $g[1] = 2$ und $h[1] = 1$ angenommen.

n	$g[k]$	0	0	2	-1	1	0	0	$x[n]$
0	$h[n - k]$	-1	1	0	0	0	0	0	0
1		0	-1	1	0	0	0	0	2
2		0	0	-1	1	0	0	0	-3
3		0	0	0	-1	1	0	0	2
4		0	0	0	0	-1	1	0	-1
5		0	0	0	0	0	-1	1	0

6 Komplexes Signal

6.1 Komplexe Schreibweise

Folgendes Signal soll in komplexer Schreibweise und unter Verwendung der komplexen Amplitude \underline{X} und der komplexen Frequenz \underline{s} dargestellt werden.

$$f(t) = 4 \cdot e^{\frac{-2000}{s} \cdot t} \cdot \cos\left(6283.2 \frac{\text{rad}}{s} \cdot t + 30^\circ\right) \quad (29)$$

Ein allgemeines komplexes Signal sieht folgendermaßen aus:

$$\underline{s}(t) = \underline{X} \cdot e^{st} \quad (30)$$

$$\underline{X} = Ae^{j\varphi} \quad (31)$$

$$e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} \quad (32)$$

Man erkennt leicht, dass es sich beim Signal $f(t)$ um den Realteil eines komplexen Signals handelt, wenn man es mit dem allgemeinen Realteil vom Signal aus Gleichungen 30, 31 und 32 vergleicht:

$$s(t) = \Re\{\underline{X} \cdot e^{st}\} = |\underline{X}| \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (33)$$

Der Realteil des Signals hängt mit dem komplexen Signal über folgende Beziehung zusammen, wobei $\underline{s}^*(t)$ für das konjugiert komplexe Signal steht:

$$\Re\{\underline{s}(t)\} = \frac{1}{2}[\underline{s}(t) + \underline{s}^*(t)] \quad (34)$$

Aus dieser Beziehung folgt:

$$4 \cdot e^{\frac{-2000}{s} \cdot t} \cdot \cos\left(6283.2 \frac{\text{rad}}{s} \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}[Ae^{j\varphi} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} + Ae^{-j\varphi} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}] \quad (35)$$

Der Kosinus kann durch die Beziehung $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ ersetzt werden. Zur besseren Lesbarkeit werden die Einheiten nun weggelassen. Man ist hier versucht, die -2000 in Radiant umzurechnen, jedoch muss bei der komplexen Frequenz $\underline{s} = \sigma + j\omega$ beachtet werden, dass es sich lediglich bei ω um eine (Kreis)Frequenz handelt und σ die Dämpfung bestimmt.

$$f(t) = \frac{1}{2}[4e^{-2000t}(e^{j(6283.2t + \frac{\pi}{6})} + e^{-j(6283.2t + \frac{\pi}{6})})] = \frac{1}{2}[Ae^{j\varphi} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} + Ae^{-j\varphi} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}] \quad (36)$$

$$f(t) = 4e^{j\frac{\pi}{6}} e^{-2000t} e^{j6283.2t} + 4e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{-2000t} e^{-j6283.2t} = Ae^{j\varphi} e^{\sigma t} e^{j\omega t} + Ae^{-j\varphi} e^{\sigma t} e^{-j\omega t} \quad (37)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich kann nun eingesetzt werden:

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \quad (38)$$

$$\sigma = -2000 \quad (39)$$

$$\omega = 6283.2 \quad (40)$$

Die Funktion $f(t)$ ist somit aus zwei Signalen zusammengesetzt:

$$f(t) = \underbrace{\underline{X} \cdot e^{st}}_{f_1(t)} + \underbrace{\underline{X}^* \cdot e^{s^*t}}_{f_2(t)} \quad (41)$$

Beim Betrachten von \underline{s} und \underline{s}^* ist schließlich ersichtlich, dass $f(t)$ auf ein konjugiert komplexes Punktepaar in der s-Ebene abbildet.

6.2 Signal in der s-Ebene

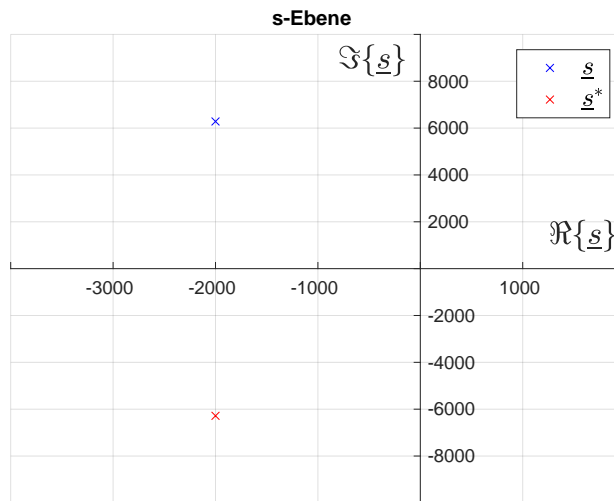


Abbildung 2: Abbildung des Signals in der s-Ebene

6.3 Signalverlauf

Im Signalverlauf (Abbildung 6.3) erkennt man, dass es sich um eine oszillierende (Kosinus-)Funktion handelt, die von einer Exponentialfunktion gedämpft wird. Es wurde noch ein Teil der Funktion für $t < 0$ im Plot gelassen, um zu zeigen, wie die Funktion für $t \rightarrow -\infty$ aufschwingt. Oft wird jedoch auch davon ausgegangen, dass ein Signal zum Zeitpunkt $t = 0$ "eingeschaltet" wird, also mit einer Sprungfunktion $\sigma(t)$ multipliziert wird.

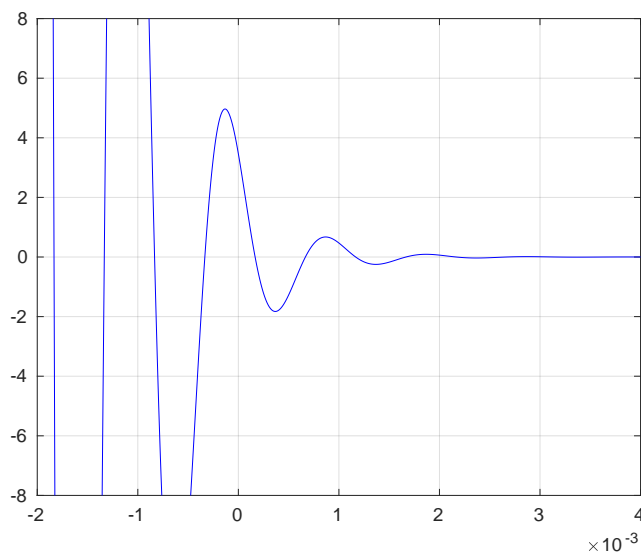


Abbildung 3: Signalverlauf von $t = -0.002$ bis $t = 0.004$

7 Widerstandsschaltung

7.1 Spannungsabfall am Lastwiderstand

Erst wird der Spannungsteiler mit R_1 sowie dem Ersatzwiderstand für R_2 , R_3 und R_L berechnet:

$$R_{23L} = R_3 || (R_2 + R_L) = \frac{R_3 \cdot (R_2 + R_L)}{R_3 + (R_2 + R_L)} = \frac{2}{3} \text{k}\Omega \quad (42)$$

Der Spannungsabfall über diesen Ersatzwiderstand kann nun wie folgt berechnet werden:

$$\frac{U_{23L}}{U} = \frac{R_{23L}}{R_{23L} + R_1} \quad (43)$$

$$U_{23L} = 1\text{V} \cdot \frac{\frac{2}{3} \text{k}\Omega}{\frac{5}{3} \text{k}\Omega} = 0.4\text{V} \quad (44)$$

Nun kann mit der Spannungsteilerregel der Spannungsabfall am Lastwiderstand selbst berechnet werden.

$$\frac{U_L}{U_{23L}} = \frac{R_L}{R_L + R_2} \quad (45)$$

$$U_L = 0.4\text{V} \cdot \frac{1\text{k}\Omega}{2\text{k}\Omega} = 0.2\text{V} \quad (46)$$

7.2 Kenngrößen der Ersatzspannungsquelle

Leerlaufspannung Über die Leitung mit dem Lastwiderstand fließt kein Strom, weshalb lediglich der Spannungsteiler mit R_1 und R_3 berechnet werden muss:

$$U_{LL} = U \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 1\text{V} \cdot \frac{1\text{k}\Omega}{2\text{k}\Omega} = 0.5\text{V} \quad (47)$$

Innenwiderstand Beim Innenwiderstand laut Folien muss der Ersatzwiderstand für R_1 , R_2 und R_3 gefunden werden:

$$R_I = R_1 + (R_2 || R_3) = 1\text{k}\Omega + \frac{1\text{k}\Omega \cdot 1\text{k}\Omega}{1\text{k}\Omega + 1\text{k}\Omega} = 1.5\text{k}\Omega \quad (48)$$

Kurzschlussstrom Der Kurzschlussstrom kann mit der Leerlaufspannung und dem Innenwiderstand berechnet werden:

$$I_K = \frac{U_{LL}}{R_I} = \frac{0.5\text{V}}{1.5\text{k}\Omega} = 333.3\mu\text{A} \quad (49)$$

8 Leistung in einem Widerstandsnetzwerk

8.1 Allgemeine Leistungsumsetzung

Für die Leistung an einem Widerstand gilt:

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 \quad (50)$$

Somit muss U_2 und I_2 berechnet werden:

$$U_2 = \frac{R_2 \cdot U}{R_1 + R_2} \quad (51)$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (52)$$

Daher gilt allgemein für die Leistung am Widerstand R_2 :

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 = \frac{R_2 \cdot U^2}{(R_1 + R_2)^2} \quad (53)$$

8.2 Leistungsanpassung

Um herauszufinden, für welchen Widerstand R_2 die Leistung maximal wird, muss diese nach R_2 abgeleitet und dann die Nullstelle gefunden werden. Für $R_1 = 100\Omega$ gilt somit:

$$\begin{aligned}\frac{dP_2}{dR_2} &= \frac{-2R_2 \cdot U^2}{(R_1 + R_2)^3} + \frac{U^2}{(R_1 + R_2)^2} \\ &= \frac{U^2(R_1 + R_2 - 2R_2)}{(R_1 + R_2)^3} = \frac{U^2(R_1 - R_2)}{(R_1 + R_2)^3}\end{aligned}\quad (54)$$

Diese Gleichung wird nun gleich 0 gesetzt und nach R_2 aufgelöst, für R_1 wird 100Ω eingesetzt.

$$\frac{U^2(100\Omega - R_2)}{(100\Omega + R_2)^3} = 0 \rightarrow R_2 = R_1 = 100\Omega \quad (55)$$

9 Wasserkocher

Bei einem Wasserkocher ist eine Leistung von 1500W bei einer Betriebsspannung von 230V angegeben. Die Stromaufnahme und der Widerstand können nun leicht mit der Formel für die Leistung berechnet werden.

$$P = U \cdot I \rightarrow I = \frac{1500\text{W}}{230\text{V}} = 6.52\text{A} \quad (56)$$

$$P = R \cdot I^2 \rightarrow R = \frac{1500\text{W}}{(6.52\text{A})^2} = 35.29\Omega \quad (57)$$

Exakter Wert ohne Rundung: $R = 35.26\Omega$

10 Knotenregel

a)

$$2\text{A} + 3\text{A} - i_a = 0\text{A} \rightarrow i_a = 5\text{A} \quad (58)$$

b)

$$\begin{aligned}1\text{A} - 3\text{A} - i_1 &= 0\text{A} \rightarrow i_1 = -2\text{A} \\ i_1 - 2\text{A} - i_b &= 0\text{A} \rightarrow i_b = -4\text{A}\end{aligned}\quad (59)$$

c)

$$\begin{aligned}4\text{A} - 3\text{A} - i_2 &= 0\text{A} \rightarrow i_2 = 1\text{A} \\ i_2 + 1\text{A} - i_c &= 0\text{A} \rightarrow i_c = 2\text{A}\end{aligned}\quad (60)$$

11 Maschenregel

U_1)

$$-U_1 - 2\text{V} + 3\text{V} + 5\text{V} = 0\text{V} \rightarrow U_1 = 6\text{V} \quad (61)$$

U_2)

$$U_2 + U_u = 0\text{V} \quad (62)$$

$$U_u + 10\text{V} - 6\text{V} + U_1 = 0\text{V} \rightarrow U_u = -10\text{V} \quad (63)$$

$$\rightarrow U_2 = 10\text{V} \quad (64)$$

U_3)

$$U_3 - 2\text{V} - 6\text{V} = 0\text{V} \rightarrow U_3 = 8\text{V} \quad (65)$$

12 Widerstand in einem Fernsehgerät

Ein Fernsehgerät hat einen Widerstand von $1\text{k}\Omega$ sowie eine maximal zulässige Leistung von 0.25W . Die Belastungsgrenzen bezüglich Strom und Spannung können wie folgt berechnet werden:

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} \quad (66)$$

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{0.25\text{W}}{1\text{k}\Omega}} = 15.81\text{mA} \quad (67)$$

$$U = R \cdot I = 1\text{k}\Omega \cdot 15.81\text{mA} = 15.81\text{V} \quad (68)$$

13 Ersatzwiderstände

a)

$$R_{ers} = 2\Omega + \frac{1}{\frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{2\Omega}} = 3\Omega \quad (69)$$

b)

$$R_{ers} = \frac{1}{\frac{1}{200\Omega} + \frac{1}{50\Omega}} + \frac{1}{\frac{1}{100\Omega} + \frac{1}{25\Omega}} = 40\Omega + 20\Omega = 60\Omega \quad (70)$$

c)

$$R_{36} = \frac{1}{\frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{6\Omega}} = 2\Omega \quad (71)$$

$$R_{836} = 8\Omega + 2\Omega = 10\Omega \quad (72)$$

$$R_{ers} = \frac{1}{\frac{1}{R_{836}} + \frac{1}{10\Omega}} = 5\Omega \quad (73)$$

d)

$$R_{612} = \frac{1}{\frac{1}{6\text{k}\Omega} + \frac{1}{3\text{k}\Omega}} = 2\text{k}\Omega \quad (74)$$

$$R_{ers} = \frac{1}{\frac{1}{6\text{k}\Omega} + \frac{1}{R_{612}}} = \frac{1}{\frac{1}{6\text{k}\Omega} + \frac{1}{2\text{k}\Omega}} = \frac{3}{2}\text{k}\Omega = 1.5\text{k}\Omega \quad (75)$$

14 RLC-Filter

14.1 Filtertype und Übertragungsfunktion

Es handelt sich bei dieser Schaltung um ein Tiefpassfilter dritter Ordnung. Dies lässt sich schnell erkennen, wenn man weiß, dass ein TP erster Ordnung und ein TP zweiter Ordnung zusammenschaltet werden, es lässt sich aber auch durch aufstellen der Übertragungsfunktion mittels Spannungsteilerregel im Frequenzbereich zeigen.

Da die beiden Filter nicht entkoppelt sind, kann man nicht einfach die Spannungsteilerregel zweimal getrennt anwenden und beide Übertragungsfunktionen multiplizieren, wir beginnen also mit der Berechnung der Spannung über C_1 :

$$U_{C_1} = U_e \cdot \frac{\frac{1}{sC_1} \parallel (sL + \frac{1}{sC_2})}{R + (\frac{1}{sC_1} \parallel (sL + \frac{1}{sC_2}))} \quad (76)$$

$$\frac{1}{sC_1} \parallel (sL + \frac{1}{sC_2}) = \frac{1}{sC_1 + \frac{1}{sL + \frac{1}{sC_2}}} = \frac{s^2 LC_2 + 1}{s^3 LC_1 C_2 + sC_1 + sC_2} \quad (77)$$

$$U_{C_1} = U_e \cdot \frac{\frac{s^2 LC_2 + 1}{s^3 LC_1 C_2 + s C_1 + s C_2}}{R + \frac{s^2 LC_2 + 1}{s^3 LC_1 C_2 + s C_1 + s C_2}} \quad (78)$$

Dann wird die Spannungsteilerregel für die Spannung über C_2 bzw. die Ausgangsspannung angewendet:

$$U_a = U_{C_1} \cdot \frac{\frac{1}{sC_2}}{sL + \frac{1}{sC_2}} = U_e \cdot \frac{\frac{s^2 LC_2 + 1}{s^3 LC_1 C_2 + s C_1 + s C_2}}{R + \frac{s^2 LC_2 + 1}{s^3 LC_1 C_2 + s C_1 + s C_2}} \cdot \frac{1}{s^2 LC_2 + 1} \quad (79)$$

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ wird mit $\frac{U_a}{U_e}$ berechnet und somit folgt:

$$H(s) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{s^3 LC_1 C_2 + s C_1 + s C_2}}{R + \frac{s^2 LC_2 + 1}{s^3 LC_1 C_2 + s C_1 + s C_2}} = \frac{1}{s^3 RLC_1 C_2 + s^2 LC_2 + sR(C_1 + C_2) + 1} \quad (80)$$

14.2 Betrag des Frequenzgangs

Um den Betrag des Frequenzgangs zu berechnen, wird s mit $j\omega$ ersetzt und der Betrag des komplexen Bruchs berechnet.

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 RLC_1 C_2 + (j\omega)^2 LC_2 + j\omega R(C_1 + C_2) + 1} \quad (81)$$

$$= \frac{1}{1 - \omega^2 LC_2 + j(\omega R(C_1 + C_2) - \omega^3 RLC_1 C_2)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC_2)^2 + (\omega R(C_1 + C_2) - \omega^3 RLC_1 C_2)^2}} \quad (82)$$

15 Integrator mit Operationsverstärker

Der Frequenzgang dieser Schaltung lässt sich leicht mit dem Wissen, wie ein invertierender OPV funktioniert, lösen. Dazu wenden wir die Formel für die Verstärkung direkt im Frequenzbereich an (wie im Skriptum zum Thema Integratoren), wobei R_F zunächst für den Rückkopplungswiderstand steht:

$$A = \frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_F}{R_1} \rightarrow H(s) \quad (83)$$

Für R_F werden der Kondensator und R_2 parallel geschaltet

Die Notation wird in Folge leicht missbraucht, da beim Kondensator ja eigentlich mit einer (komplexen) Impedanz gerechnet wird:

$$R_F = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + sC} \quad (84)$$

Daher gilt für $H(s)$:

$$H(s) = -\frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + sC} = -\frac{R_2}{R_1 + sR_1 R_2 C} \quad (85)$$

Für s wird schließlich noch $j\omega$ eingesetzt:

$$H(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1 + j\omega R_1 R_2 C} \quad (86)$$

16 Passives Filter

Bei diesem Filter handelt es sich um ein Hochpassfilter zweiter Ordnung. Dies erkennt man an den zwei Hochpassfiltern (Widerstand-Induktivität Konfiguration), die hintereinander (aber ohne Buffer) geschaltet sind.

Die Übertragungsfunktion errechnet sich mittels Maschenstromverfahren folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{Linke Masche mit } i_1 : -U_e + i_1 R_1 + (i_1 - i_2) s L_1 &= 0 \\ U_e &= i_1 (R_1 + s L_1) - i_2 s L_1 \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \text{Rechte Masche mit } i_2 : i_2 s L_2 + i_2 R_2 - (i_1 - i_2) s L_1 &= 0 \\ &= -i_1 s L_1 + i_2 (s(L_1 + L_2) + R_2) \end{aligned} \quad (88)$$

Man sieht, dass Impedanzen, über die zwei verschiedene Maschenströme in verschiedene Richtungen fließen, mit $(i_a - i_b)$ multipliziert werden müssen. Als nächstes werden diese Gleichungen in Matrixschreibweise gebracht (mit Impedanzmatrix \mathbf{Z}_M):

$$\mathbf{Z}_M \cdot \mathbf{i} = \mathbf{u} \quad (89)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + sL_1 & -sL_1 \\ -sL_1 & s(L_1 + L_2) + R_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (90)$$

Um i_1 und i_2 zu berechnen, wird die inverse Impedanzmatrix mit \mathbf{u} multipliziert.

$$\mathbf{i} = \mathbf{Z}_M^{-1} \cdot \mathbf{u} \quad (91)$$

Normalerweise sollte sich niemand damit quälen, eine Matrix händisch zu invertieren, zum Zweck der Übung/Prüfung wenden wir jedoch ein Verfahren an, welches oft einfacher und praktischer als der übliche Weg über die Einheitsmatrix ist. Für reguläre quadratische Matrizen gilt nämlich:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})} \quad (92)$$

Die sogenannte adjunkte Matrix ist die transponierte Kofaktormatrix, welche wiederum die Matrix der Minoren mit einem +- Schachbrettmuster ist (in a Nutshell). Wir bilden also die adjunkte Matrix sowie die Determinante von \mathbf{Z}_M :

$$\text{adj}(\mathbf{Z}_M) = \begin{pmatrix} s(L_1 + L_2) & sL_1 \\ sL_1 & R_1 + sL_1 \end{pmatrix} \quad (93)$$

$$\det(\mathbf{Z}_M) = (R_1 + sL_1)(s(L_1 + L_2) + R_2) - (sL_1)^2 \quad (94)$$

Somit gilt für \mathbf{i} :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{s(L_1 + L_2)}{(R_1 + sL_1)(s(L_1 + L_2) + R_2) - (sL_1)^2} & \frac{sL_1}{(R_1 + sL_1)(s(L_1 + L_2) + R_2) - (sL_1)^2} \\ \frac{sL_1}{(R_1 + sL_1)(s(L_1 + L_2) + R_2) - (sL_1)^2} & \frac{R_1 + sL_1}{(R_1 + sL_1)(s(L_1 + L_2) + R_2) - (sL_1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_e \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_e \cdot \left(\frac{s(L_1 + L_2)}{(R_1 + sL_1)(s(L_1 + L_2) + R_2) - (sL_1)^2} \right) \\ U_e \cdot \left(\frac{sL_1}{(R_1 + sL_1)(s(L_1 + L_2) + R_2) - (sL_1)^2} \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (95)$$

Nun können wir i_2 in die Ausgangsspannung einsetzen und die Übertragungsfunktion berechnen:

$$U_a = i_2 \cdot sL_2 = U_e \cdot \frac{sL_1}{(R_1 + sL_1)(s(L_1 + L_2) + R_2) - (sL_1)^2} \cdot sL_2 \quad (96)$$

$$H(s) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{s^2 L_1 L_2}{(R_1 + sL_1)(s(L_1 + L_2) + R_2) - (sL_1)^2} \quad (97)$$

17 Sallen-Key-Tiefpassfilter

Das Knotenpotenzialverfahren basiert darauf, dass Ströme in Zweigen mittels Spannungsdifferenzen angeschrieben werden. In der Abbildung sind schon zwei Knoten eingezeichnet, der Knoten K_1 mit Spannung U_1 und Knoten K_2 mit Spannung U_2 .

Als erstes fällt auf, dass der Ausgang des OPV zum negativen Eingang kurzgeschlossen wird. Da die Spannung zwischen positivem und negativem Eingang $U_d = 0V$ ist, gilt:

$$U_2 = U_a \quad (98)$$

Als nächstes werden die Knotengleichungen aufgestellt:

$$K_1 : i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (99)$$

$$K_2 : i_2 - i_4 = 0 \quad (100)$$

Die Ströme werden nun mit den Spannungsdifferenzen dargestellt:

$$K_1 : \frac{U_e - U_1}{R_1} - \frac{U_1 - U_a}{R_2} - (U_1 - U_a)sC_2 = 0 \quad (101)$$

$$K_2 : \frac{U_1 - U_a}{R_2} - U_a sC_1 = 0 \quad (102)$$

Grundsätzlich kann der Rest des Knotenpotenzialverfahrens analog zum Maschenstromverfahren gelöst werden. Es wird lediglich nach der Spannung aufgelöst und es wird eine Admittanzmatrix \mathbf{Y}_M anstatt der Impedanzmatrix verwendet. Da dies jedoch schon in der vorherigen Aufgabe durchgeführt wurde, wird hier lediglich die Gleichung für K_2 nach U_1 aufgelöst und in die Gleichung für K_1 eingesetzt.

$$\frac{U_1 - U_a}{R_2} - U_a sC_1 = 0 \rightarrow U_1 = U_a \cdot (sR_2C_1 + 1) \quad (103)$$

$$\frac{U_e - U_a \cdot (sR_2C_1 + 1)}{R_1} - \frac{U_a \cdot (sR_2C_1 + 1) - U_a}{R_2} - (U_a \cdot (sR_2C_1 + 1) - U_a)sC_2 = 0 \quad (104)$$

$$\frac{U_e - U_a \cdot (sR_2C_1 + 1)}{R_1} = U_a \cdot (sC_1 + s^2R_2C_1C_2) \quad (105)$$

$$U_e = U_a \cdot (s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_2C_1 + 1) \quad (106)$$

$$H(s) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_2C_1 + 1} \quad (107)$$

18 Matlab

18.1 Übertragungsfunktionen

Die mit Matlab berechneten Übertragungsfunktionen sind folgende:

$$H_{Bessel}(s) = \frac{1}{s^5 + 3.811s^4 + 6.777s^3 + 6.886s^2 + 3.936s + 1} \quad (108)$$

$$H_{Cauer}(s) = \frac{0.04078s^4 + 0.1574s^2 + 0.1387}{s^5 + 0.5675s^4 + 1.633s^3 + 0.6766s^2 + 0.624s + 0.1387} \quad (109)$$

18.2 Plots

Es waren jeweils ein Bodediagramm, Sprungantwort sowie ein Pol-Nullstellendiagramm von einem (allgemeinen) Besselfilter und Cauerfilter gefordert. Diese können in Abbildungen 18.3, 18.3, 18.5, 18.5, 18.4 und 18.4 gefunden werden.

18.3 Bodediagramme/Betragsgang

Man erkennt an den Bodediagrammen die beworbenen Eigenschaften der Filter:

Das Besselfilter weist einen annähernd linearen Phasengang auf (hier natürlich nicht zu sehen), hat jedoch eine eher geringe Flankensteilheit im Gegensatz zu anderen Filtern (weniger Frequenzselektivität). Auf der anderen Seite weist das Cauerfilter eine vergleichsweise hohe Flankensteilheit auf, was jedoch mit einer gewissen Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich kommt.

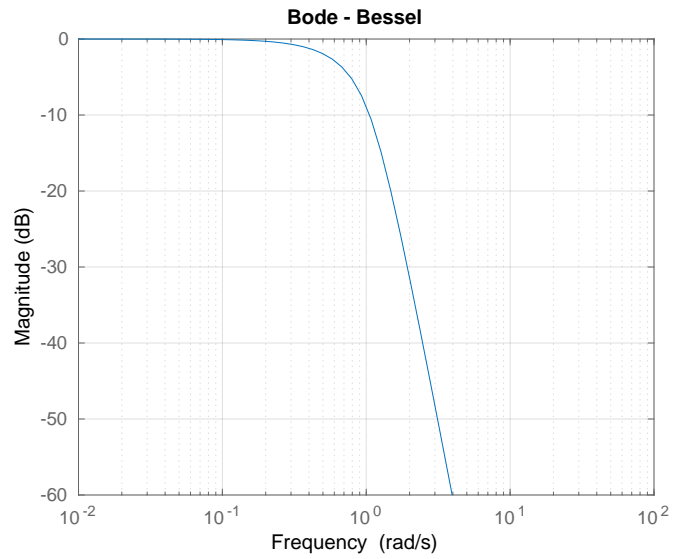


Abbildung 4: Betragsgang Besselfilter

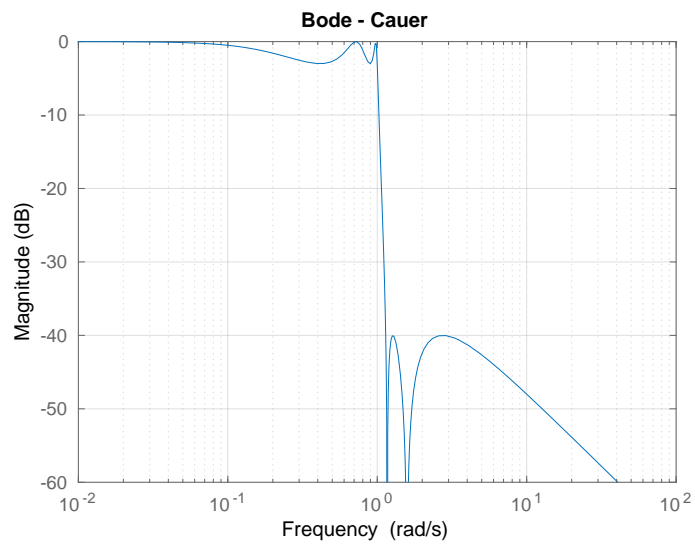


Abbildung 5: Betragsgang Cauerfilter

18.4 Pol-Nullstellendiagramm des Cauerfilters

Als nächstes sollte das Pol-Nullstellendiagramm des Cauerfilters mit dem Betragsgang von vorhin verglichen werden. Hier erkennt man, dass die Nullstellen im PN Diagramm mit den "Spikes" des Betragsgangs übereinstimmen. In den Plots für den Besselfilter ist dies nicht vorzufinden, denn dieses Filter hat keine Nullstellen, wie Übertragungsfunktion leicht zu entnehmen ist.

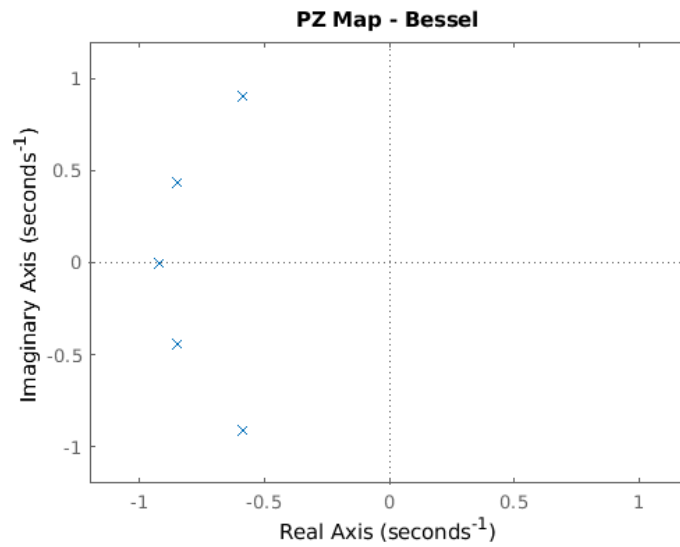


Abbildung 6: Pol-Nullstellen Bessel

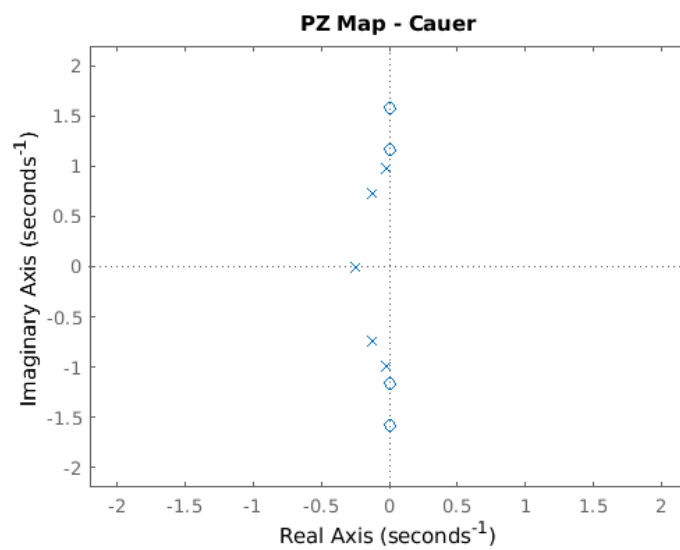


Abbildung 7: Pol-Nullstellen Cauer

18.5 Sprungantwort

Zuletzt sollte man sich noch ein Bild der Sprungantworten machen. Auch hier ist wider das typische Verhalten der Filtertypen sichtbar:

Das Besselfilter ist wesentlich stärker gedämpft und schwingt kaum über, während das Cauerfilter lange braucht bis es sich einpendelt. Dies hängt auch mit den PN Diagrammen zusammen, je weiter links die Pole einer Übertragungsfunktion in der linken s -Halbebene liegen, desto höher ist die Dämpfung und die Stabilität. Ganz allgemein, wenn ein Pol auf der rechten geschlossenen s -Halbebene liegt, so ist die zugehörige Übertragungsfunktion nicht (BIBO-)stabil.

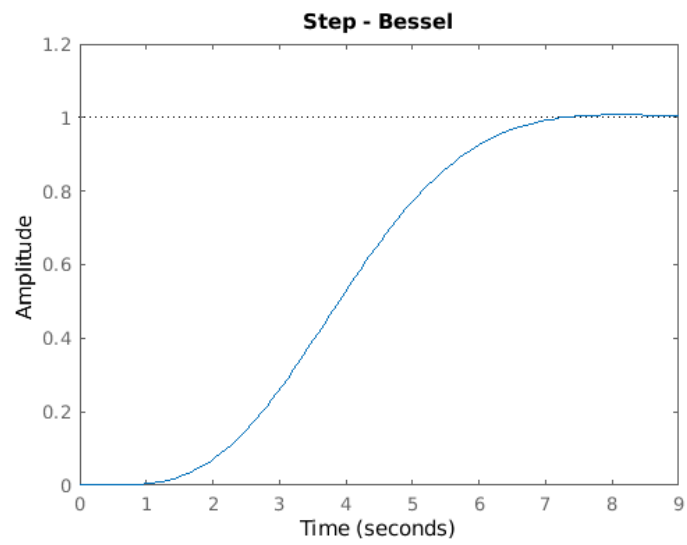


Abbildung 8: Sprungantwort Besselfilter

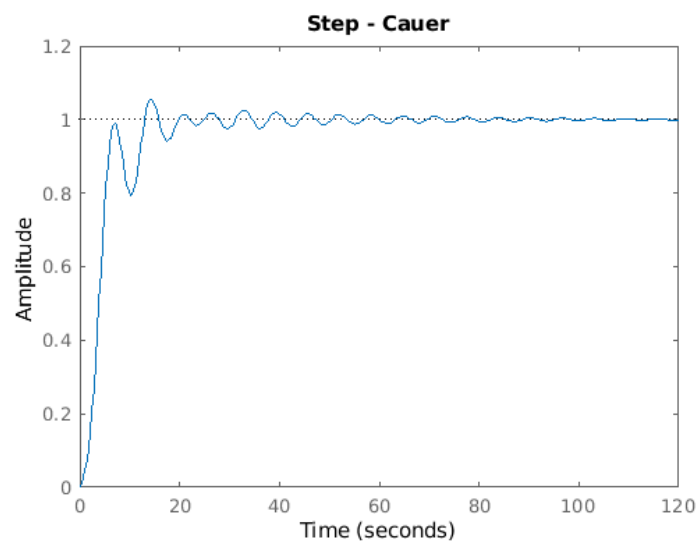


Abbildung 9: Sprungantwort Cauerfilter

18.6 Source Code

```
1 % Uebertragungsfunktion Besselfilter & Cauerfilter 5. Ordnung
2 % Welligkeit im Durchlassbereich 3 dB, Sperrdaempfung min. 40 dB
3
4 % Bode Options
5 opts=bodeoptions('cstprefs');
6 opts.PhaseVisible = 'off';
7 opts.YLim={[-60 0]};
8 opts.XLim={[0.01, 100]};
9
10 % PZOptions Bessel
11 pzopt_b = pzoptions('cstprefs');
12 pzopt_b.XLim={[-1.2, 1.2]};
13 pzopt_b.YLim={[-1.2, 1.2]};
14
15 % PZOptions Cauer
16 pzopt_c = pzoptions('cstprefs');
17 pzopt_c.XLim={[-2.2, 2.2]};
18 pzopt_c.YLim={[-2.2, 2.2]};
19
20 % Besselfilter
21 [zb,pb,kb] = besslap(5);
22 [num_b, den_b] = zp2tf(zb,pb,kb);
23 tf_bessel = tf(num_b, den_b)
24
25 % Bode - Bessel
26 figure
27 bode(tf_bessel, opts)
28 title('Bode - Bessel')
29 grid on
30
31 % Step - Bessel
32 figure
33 step(tf_bessel)
34 title('Step - Bessel')
35
36 % PZMap - Bessel
37 figure
38 pzmap(tf_bessel, pzopt_b)
39 title('PZ Map - Bessel')
40
41 % Cauerfilter
42 [zc,pc,kc] = ellipap(5,3,40);
43 [num_c, den_c] = zp2tf(zc,pc,kc);
44 tf_cauer = tf(num_c, den_c)
45
46 % Bode - Cauer
47 figure
48 bode(tf_cauer, opts)
49 title('Bode - Cauer')
50 grid on
51
52 % Step - Cauer
53 figure
54 step(tf_cauer)
55 title('Step - Cauer')
56
57 % PZMap - Cauer
58 figure
59 pzmap(tf_cauer, pzopt_c)
60 title('PZ Map - Cauer')
```

Abbildung 10: Der Matlab Code, um die Plots zu erzeugen