Beispiel 81 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 9, 01.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man bestimme die Lösung der Differenzengleichung $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ (für $n \geq 0$) zum Anfangswert $x_0 = 0$ auf graphischem Weg, berechne die Gleichgewichtspunkte und überprüfe sie auf Stabilität.

2 Theoretische Grundlagen: Gleichgewichtspunkte und Stabilität

Wenn wir eine explizit dargestellte Differenzengleichung 1. Ordnung betrachten, interessiert uns oft der Verlauf nach längerer Laufzeit. Wir nehmen nun an, dass die Funktion gegen einen Fixpunkt konvergiere ($x^* = f(x^*)$. x^* heißt Gleichgewichtspunkt der Differenzengleichung - diesen zu finden ist eine Aufgabe der qualitativen Theorie.
Definition (Stabilität von Gleichgewichtslagen): Ein Gleichgewicht x^* heißt **stabil**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\partial = \partial(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle Lösungsfolgen (x_n) mit $|x_0 - x^*| < \partial$ gilt: $|x_0 - x^*| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Ein Gleichgewichtspunkt x^* heißt **asymptotisch stabil**, wenn es ausserdem ein $\partial > 0$ gibt, so dass für alle x_n mit $|x_0 - x^*| < \partial$ gilt: $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Andernfalls heisst x^* **instabil**.

3 Lösung des Beispiels

Die graphische Lösung erhalten wir, indem wir einige Funktionswerte der Differenzengleichung berechnen und dann den Schnittpunkt mit der Fixpunktgeraden finden.
Analytisch gewinnen wir x^* durch Gleichsetzen von $\sqrt{2 + x_n}$ mit x:

$$\sqrt{2 + x_n} = x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$
$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$$

$x_1 = x^* = 2$ ist der Gleichgewichtspunkt.
Nun prüfen wir auf Stabilität, indem wir zunächst die erste Ableitung vornehmen:

$$f'(x_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 + x}}$$

In die Ableitung setzen wir 2 ein und erhalten als Ergebnis $\frac{1}{4} < 1$ - ist unser x^* asymptotisch stabil.