

3.11 Phasenübergänge

Wird einer Substanz bei konstantem Druck Wärme zugeführt, so steigt im allgemeinen ihre Temperatur. Manchmal kommt es aber trotz Wärmezufuhr zu keiner Temperatur-erhöhung, nämlich dann, wenn ein Phasenübergang stattfindet. Die wichtigsten Übergänge sind Schmelzen (fest→flüssig), Verdampfen (flüssig→gasförmig) und Sublimieren (fest→gasförmig) sowie jeweils die Umkehrung dieser Vorgänge: Gefrieren oder Erstarren (flüssig→fest) und Kondensieren (gasförmig→flüssig oder gasförmig→fest). Andere Phasenübergänge sind etwa die zwischen verschiedenen Kristallmodifikationen bei manchen Festkörpern.

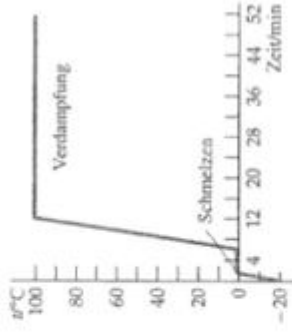


Abb. 43

Einem 1 kg schweren Eisblock mit der Anfangstemperatur -20°C wird gleichmäßig (mit 1 kJ/s) Wärme zugeführt. Bei 0°C schmilzt das Eis und die Temperatur bleibt konstant, bis alles geschmolzen ist. Dann wird die Temperatur des Wassers bis auf 100°C erhöht und hier bleibt die Temperatur während des Verdampfens ebenfalls konstant. Würde man, nachdem die gesamte Wassermenge verdampft ist, weiter Wärme zuführen, so würde sich die Temperatur des Dampfes erhöhen.

Eine Temperaturerhöhung einer Substanz spiegelt das Ansteigen der kinetischen Energie der Moleküle wieder. In einer Flüssigkeit sind die Moleküle viel enger zusammen als in einem Gas. Daher muß beim Verdampfen Arbeit gegen die Anziehungskräfte verrichtet werden, die die Moleküle in der Flüssigkeit aufeinander ausüben. Diese Arbeit dient also dazu, die Moleküle voneinander zu trennen, d.h. sie erhöht die potentielle Energie der Moleküle, nicht aber die kinetische. Daher ändert sich auch die Temperatur nicht.

Bei jeder Substanz finden die Phasenübergänge bei ganz bestimmten Temperaturen statt. Die für die Umwandlung nötige Wärmemenge nennt man *latente Wärme*.

3.12 Wärmeübertragung

Wärmeenergie kann auf drei Arten übertragen werden, nämlich durch Wärmeleitung, Konvektion oder Wärmestrahlung. Bei der Wärmeleitung vollzieht sich der Energietransport durch Wechselwirkung zwischen Atomen und Molekülen, die aber selbst nicht transportiert werden. Bei der Konvektion ist die Übertragung auch mit einem Stofftransport verbunden. Wird beispielsweise Luft erwärmt, dann nimmt ihr Volumen zu und ihre Dichte ab, dadurch steigt sie auf und nimmt die aufgenommene Wärme mit nach oben. Bei der Wärmestrahlung emittieren oder absorbieren die Körper Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung, die sich im Raum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Jeder Körper emittiert und absorbiert ständig Strahlung. Im folgenden werden Wärmeleitung und Wärmestrahlung näher beschrieben.

Wenn sich die beiden Frequenzen nicht sehr unterscheiden, d.h. wenn $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega$ ($\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$), dann kann man schreiben:

$$x(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos \omega' t =$$

$$x(t) = a'(t) \cos(\omega' t)$$

mit der sich langsam ändernden Amplitude $a'(t)$.
Diesen Vorgang nennt man **Schwebung!**

5.1.4 Überlagerung zweier senkrechter Schwingungen (Lissajous - Figuren)

Überlagert man zwei Schwingungen, deren Amplituden senkrecht zueinander stehen, mit verschiedener Frequenz und Phase, gegeben durch:

$$x(t) = a \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y(t) = b \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

so beschreibt die Bahnkurve im allgemeinen eine komplizierte Bahn, die nur dann eine geschlossene Kurve darstellt, wenn ω_1/ω_2 eine rationale Zahl ist (Lissajous - Figuren). Bei irrationalem ω_1/ω_2 - Verhältnis füllt die Bahnkurve im Lauf der Zeit die gesamte Fläche

$$-a \leq x \leq +a$$

$$-b \leq y \leq +b$$

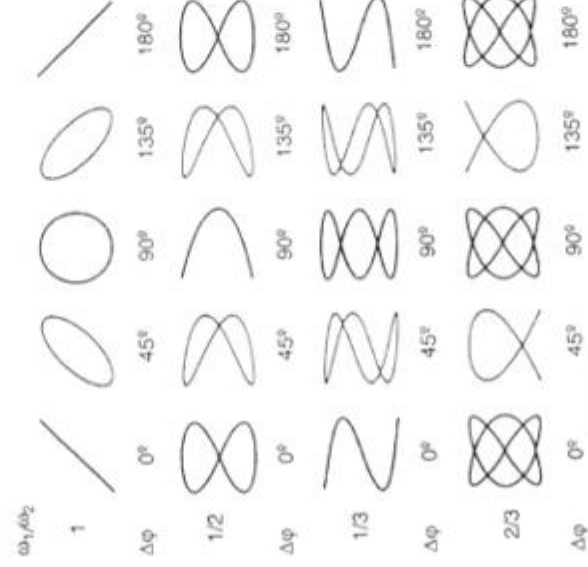


Abb. 27 Lissajous Figuren für $\omega_1/\omega_2 = 1, 1/2, 1/3, 2/3$ und $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$

Die Größe ϵ , der Emissionsgrad, liegt zwischen 0 und 1 und hängt von der Oberflächenbeschaffenheit des strahlenden Körpers ab. Der Faktor „Sigma“ ist die Stefan-Boltzmann-Konstante

$$\sigma = 5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$



Abb. 45

Die Strahlung, die durch ein kleines Loch aus einem erhitzten Hohlraum austritt, gleicht in guter Näherung der Strahlung eines schwarzen Körpers. Sie steht im Inneren mit den Wänden in thermischem Gleichgewicht, weil sie mehrfach absorbiert und wieder abgestrahlt wird, bevor sie austritt.

Einen Körper, der die gesamte auftreffende Strahlung absorbiert, nennt man schwarzen Körper. Er ist gleichzeitig ein idealer Strahler (mit dem Emissionsgrad 1). Seine Strahlungseigenschaften können theoretisch berechnet werden und spielen in der Physik eine große Rolle. Im Experiment nimmt man als schwarzen Körper einen erhitzten Hohlraum, der eine kleine Öffnung hat, durch die die Strahlung austreten kann. Im Inneren befindet sich die elektromagnetische Strahlung mit den Wänden in thermischem Gleichgewicht. Die austretende Strahlung ist daher charakteristisch für die Temperatur des Hohlraums. Die Strahlung eines schwarzen Körpers nennt man deshalb auch Hohlraumstrahlung.

Bei einer Temperatur von rund 600°C ist die Strahlung des schwarzen Körpers nicht sichtbar, da sie fast ganz bei Wellenlängen über 800 nm liegt. Mit höherer Temperatur steigt die Strahlungsleistung stark an (wie in der obigen Gleichung), außerdem nimmt das Maximum der Strahlung immer kleinere Wellenlängen an. Abb. 46 zeigt die emittierte Strahlungsleistung gegen die Wellenlänge aufgetragen, bei drei verschiedenen Temperaturen. Die Wellenlänge des Maximums ist umgekehrt proportional zur Temperatur

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = \text{const} = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Dies ist das *Wiensche Verschiebungsgesetz*. Mit seiner Hilfe kann man die Temperatur von Sternen aus der Charakteristik der von ihnen ausgesandten Strahlung bestimmen. Auch die Temperaturen an verschiedenen Stellen der Oberfläche von heißen Körpern lassen sich damit ermitteln.

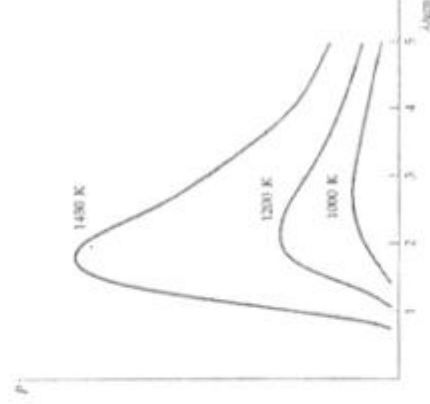


Abb. 46

Die Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers in Abhängigkeit von der Wellenlänge für drei verschiedene Temperaturen.

Erst durch die Berücksichtigung entsprechender Anfangsbedingungen ist die gesuchte Bewegungsgleichung bestimmt, die dieselbe Form wie die allgemeine Lösung hat, allerdings sind jetzt Amplitude und Phase durch konstante Werte gegeben.

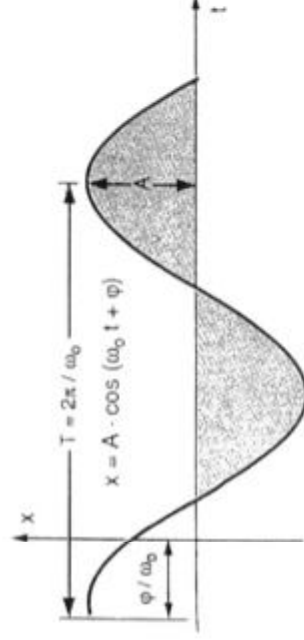


Abb. 24. Schwingungsdauer T , Amplitude A und Phase φ einer harmonischen Schwingung

5.1.1 Überlagerung von Schwingungen

In der Natur treten reine harmonische Schwingungen selten auf, sondern meist mehr oder weniger komplizierte Schwingungsformen. Es zeigt sich jedoch, daß man auch komplizierte, nichtharmonische Schwingungen als **Überlagerung von harmonischen Schwingungen** mit unterschiedlichen Frequenzen, Amplituden und Phasen darstellen kann.

5.1.2 Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Richtung und gleicher Frequenz mit verschiedener Amplitude und Phase

$$x_1(t) = a \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = b \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Durch Summieren erhält man:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ &= C \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

mit den Relationen:

$$A = a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2$$

$$B = -a \sin \varphi_1 - b \sin \varphi_2$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\tan \varphi = -B / A$$

mechanische Arbeit, so sieht man, daß deren *Summe* bei derselben Temperaturdifferenz stets die gleiche ist.

Mit anderen Worten: Die Summe der Arbeit, die am System verrichtet wurde, und der von ihm abgeführten Wärme ist gleich der Änderung der inneren Energie des Systems. Dies entspricht der Aussage des ersten Hauptsatzes.

Bei der Kompression eines Gases wird eine mechanische Arbeit W am System verrichtet, dessen innere Energie U sich dadurch erhöht. Expandiert das Gas gegen den Atmosphärendruck, so gibt es Arbeit an die Umgebung ab, und seine innere Energie wird geringer, die verrichtete Arbeit ist dann $-|W|$. Die einem System zugeführte Wärmemenge Q wird positiv gerechnet.

Der *Erste Hauptsatz der Thermodynamik* lautet somit

$$\Delta U = Q + W$$

üblicherweise so geschrieben:

$$Q = \Delta U - W$$

Die dem System netto zugeführte Wärme Q ist die Differenz der Änderung seiner inneren Energie und der von ihm verrichteten Arbeit W .

Die innere Energie U eines Systems ist eine Zustandsfunktion. Das bedeutet, sie ist nur vom jeweiligen Zustand des Systems abhängig und nicht davon, auf welchem Wege dieser erreicht wurde. Im Unterschied dazu sind die verrichtete Arbeit und die umgesetzte Wärme *keine* Zustandsfunktionen. Man kann zwar sagen, ein System habe die innere Energie U , aber man kann ihm keinen bestimmten Inhalt an Arbeit oder Wärme zuschreiben. Dies sind genauer die möglichen Formen der Energie, die das System mit der Umgebung austauschen kann, wobei sich seine innere Energie, also sein Zustand, ändert.

Wichtig ist, daß Wärme nicht als solche im System enthalten ist, sondern die Form der Energie darstellt, die aufgrund einer Temperaturdifferenz vom System zur Umgebung und umgekehrt übergehen kann.

Der erste Hauptsatz in differentieller Schreibweise:

$$dQ = dU - dW$$

Hier ist dU das Differential der Zustandsfunktion U , aber weder dQ noch dW sind vollständige Differentiale, sondern symbolisieren nur eine infinitesimale Änderung von Q und W .

3.13.1 Die innere Energie eines idealen Gases

Wie bereits gezeigt, ist die kinetische Energie der Moleküle, mit einem einfachen Teilchenmodell eines idealen Gases bei der Temperatur T ,

$$W_{\text{kin}} = \frac{3}{2} nRT$$

wobei n die Anzahl der Mole des Gases und R die Gaskonstante ist. Mit der kinetischen Energie ist hier wieder nur die Translationsenergie gemeint. Sie bezieht sich auf die Bewegung der Moleküle als Ganzes und ist zum Beispiel von der kinetischen Energie der Schwingung ihrer

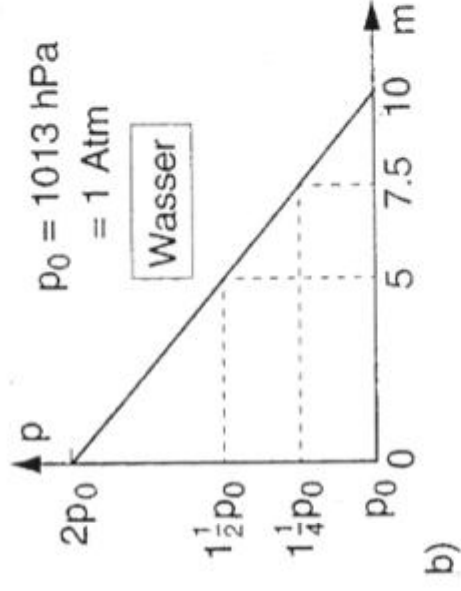
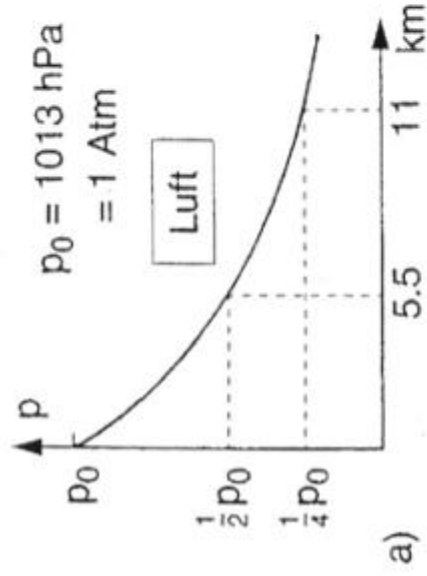


Abb. 22 a) Vergleich des Druckverlaufs $p(z)$ mit steigender Höhe in der Erdatmosphäre und b) in einer Wassersäule mit 10m Höhe. Zum reinen Wasserdruck addiert sich noch der Luftdruck $p_0 = 1 \text{ bar}$ an der Wasseroberfläche $z = 10 \text{ m}$

Die Volumsarbeit ist bei dieser isobaren Expansion gegeben durch:

$$W = -p_0 \Delta V$$

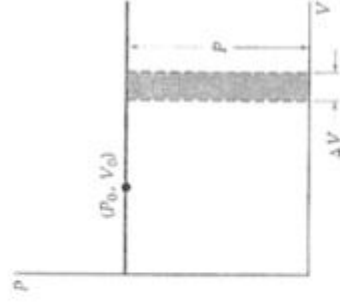


Abb. 49

Das p - V -Diagramm für die isobare (bei konstantem Druck erfolgende) Expansion eines Gases. Die getönte Fläche gibt den Betrag der Volumsarbeit an.

Im allgemeinen muß die Druckänderung während der Expansion berücksichtigt werden und der Betrag der vom Gas verrichteten Arbeit ist gleich der Fläche unter der jeweiligen p - V -Kurve zwischen Anfangs- und Endvolumen

$$W = - \int p dV$$

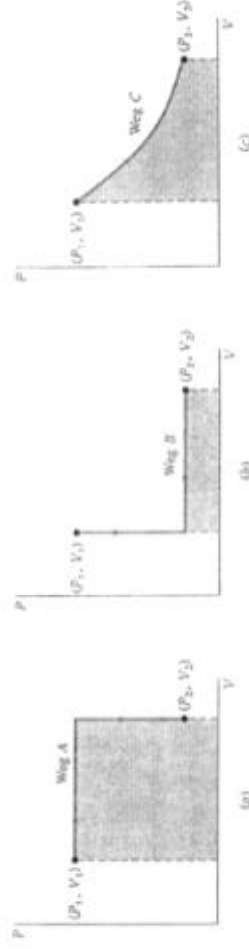


Abb. 50

p - V -Diagramme mit drei möglichen Wegen der Expansion eines idealen Gases vom jeweils gleichen Anfangszustand zum gleichen Endzustand. Der Betrag der jeweiligen Volumsarbeit ist gleich der getönten Fläche.

In Abb. 50 sind drei verschiedene p - V -Diagramme gezeigt, auf denen die Expansion vom selben Anfangszustand (p_1, V_1) zum selben Endzustand (p_2, V_2) erfolgen kann. Die Volumsarbeit entlang des Weges A hat im horizontalen Teil den Betrag $p_1(V_2 - V_1)$. Sie ist Null, wegen $V =$ konstant, für den vertikalen Teil. In Bild b wird zuerst bei konstantem Volumen abgekühlt und dann bei konstantem Druck erwärmt. Die gesamte Volumsarbeit entlang des Weges B ist gleich $p_2(V_2 - V_1)$. Man sieht an den getönten Flächen sofort, daß die Volumsarbeit entlang des Weges B viel geringer ist, als die entlang des Weges A.

In Bild c wird die Expansion bei konstanter Temperatur durchgeführt, man nennt dies isotherme Expansion. Bei unveränderter Temperatur ist für das ideale Gas $pV =$ konstant. Druck und Volumen ändern sich gleichzeitig während des gesamten Expansionsvorganges.

Geht man aus von

$$p = nRT / V$$

dann gilt

$$dW = -pdV = - \frac{nRT}{V} dV$$

4.4 Gase

Anders als bei festen oder flüssigen Körpern, die unter Einwirkung äußerer Kräfte ihr Volumen nur wenig ändern, lassen sich Gase beliebig expandieren und bei Einwirken eines äußeren Druckes bis zu einer gewissen Grenze auch beliebig komprimieren. Dies liegt daran, daß ihre Dichte bei Atmosphärendruck etwa um drei Größenordnungen kleiner ist als die der festen oder flüssigen Phase. Der mittlere Abstand der Atome bzw. Moleküle ist deshalb etwa zehnmal größer, und ihre kinetische Energie ist größer als die potentiell Energie (verursacht durch die interatomare bzw. intermolekulare Wechselwirkung).

4.4.1 Boyle - Mariottesches Gesetz

Dieses Gesetz besagt, daß das Produkt von Druck p und dem Volumen V bei gleicher Temperatur konstant ist

$$p \cdot V = \text{const}$$

4.4.2 Luftdruck und barometrische Höhenformel

Genau wie bei der Flüssigkeit entsteht auch in einem Gas, infolge seines Gewichtes ein Schweredruck, der mit der **Torricellischen Röhre** gemessen werden kann.

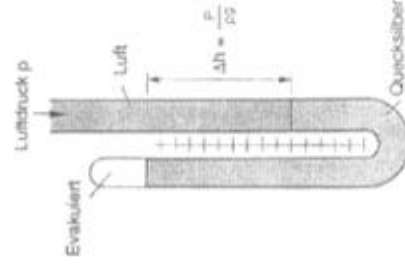


Abb. 21 Torricellische Röhre zur Messung des Luftdrucks.

Diese besteht aus einem U - Rohr, das auf einer Seite abgeschlossen und auf der anderen Seite offen ist. Über der Quecksilberoberfläche in der abgeschlossenen Hälfte ist keine Luft (nur der vernachlässigbar kleine Dampfdruck des Hg, der etwa 0.1 Pa beträgt), auf der offenen Seite herrscht Luftdruck.

Man bezeichnet den Druck von 101325 Pa den die Lufthülle bei normalen Wetterbedingungen in Meereshöhe auf die Erdoberfläche ausübt als **Normaldruck**, und definiert ihn als eine **physikalische Atmosphäre**.

Nach dem ersten Hauptsatz ist

$$dQ_p = dU - dW = dU + pdV$$

und damit

$$C_p dT = dU + pdV$$

Die rechte Seite der oben angegebenen Gleichung bezeichnet man auch als $dH = dU + pdV$, die Änderung der *Enthalpie* H . Diese ist definiert als

$$H = U + pV$$

Mit $dU = C_v dT$ folgt

$$C_p dT = C_v dT + pdV.$$

Für ein ideales Gas gilt: $pV = nRT$ und damit auch

$$pdV = nRdT$$

Somit folgt

$$C_p dT = C_v dT + nRdT$$

und schließlich

$$C_p = C_v + nR$$

Die Wärmekapazität bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen unterscheidet sich bei n Molen eines idealen Gases also um nR .

Wenn die innere Energie des Gases ausschließlich aus der kinetischen Energie der Translation der Teilchen besteht, so ist

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

Damit sind die Wärmekapazitäten

$$C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} nR$$

und

$$C_p = C_v + nR = \frac{5}{2} nR$$

Die mittlere kinetische Energie der Translation in x -Richtung beträgt, wie früher gezeigt wurde, pro Teilchen $\frac{1}{2} kT$ bzw. pro Mol $\frac{1}{2} RT$. Natürlich ist die kinetische Energie in y - und in z -Richtung im Mittel genauso groß. Daß sich die kinetische Energie im Gleichgewicht auf alle drei Raumrichtungen gleich verteilt, kann mit der statistischen Thermodynamik begründet werden. Jede unabhängige Orts- oder Impulsordinate, durch die man die Energie eines Teilchens beschreiben kann, bezeichnet man als *Freiheitsgrad*.

Dies ist der **Gleichverteilungssatz**:

Befindet sich eine Substanz im Gleichgewicht, so entfällt auf jeden einzelnen Freiheitsgrad eine mittlere Energie von $\frac{1}{2} kT$ pro Teilchen, also von $\frac{1}{2} RT$ pro Mol.

Es gibt aber auch zwei- (und mehr-) atomige Gase, wie zum Beispiel Sauerstoff, Stickstoff oder Kohlenmonoxid. Die innere Energie dieser Gase ist

Die Konstante p_0 ist der **Gesamtdruck**, $(1/2)\rho u^2$ ist der **Staudruck** und p ist der **statische Druck**.

Alle diese Überlegungen gelten nicht bei turbulenter Strömung, da in diesem Fall die Energie zur Wirbelbildung in der Strömung, sowie die Reibungsenergie im Energieerhaltungssatz berücksichtigt werden muß.

Obwohl die Bernoulli Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten hergeleitet wurde, kann man mit dieser Gleichung auch Druckverhältnisse in strömenden Gasen beschreiben. Z. B. beruht der aerodynamische Auftrieb an umströmten Tragflächen oder das Abdecken von Hausdächern auf physikalischen Phänomenen die mit der Bernoulli Gleichung beschrieben werden können.

4.3.3 Laminare Strömung durch Röhren (Gesetz von Hagen - Poiseuille)

Die Strömung von Flüssigkeiten durch zylindrische Röhren spielt eine große Rolle in vielen Bereichen der Technik (Wasserleitung, Ölleitung) und in der Medizin (Bluttransport in den Adern).

Bei der Herleitung des Hagen - Poiseulleschen Gesetzes geht man davon aus, daß durch eine Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$ zwischen den Enden $z = 0$ und $z = L$ eines Kreiszyllinders mit dem Radius R eine stationäre Strömung aufrechterhalten wird (Abbildung 20a). Für einen koaxialen Teilzylinder mit dem Radius r , setzt man nun die Reibungskraft auf die Zylinderoberfläche und die Druckkraft auf die untere Stirnfläche gleich:

$$\eta 2r\pi L \frac{du}{dr} = r^2\pi(p_1 - p_2)$$

Der Vorfaktor η heißt **dynamische Zähigkeit** oder **Viskosität** Einheit: $[N m^{-2} s] = [Pa s]$. (Beispiele für die Viskosität einiger Flüssigkeiten bei 20°C, in Einheiten von $10^{-3} Pa s$: Wasser 1.002, Benzol 0.65, Ethanol 1.20, Glycerin 1480).

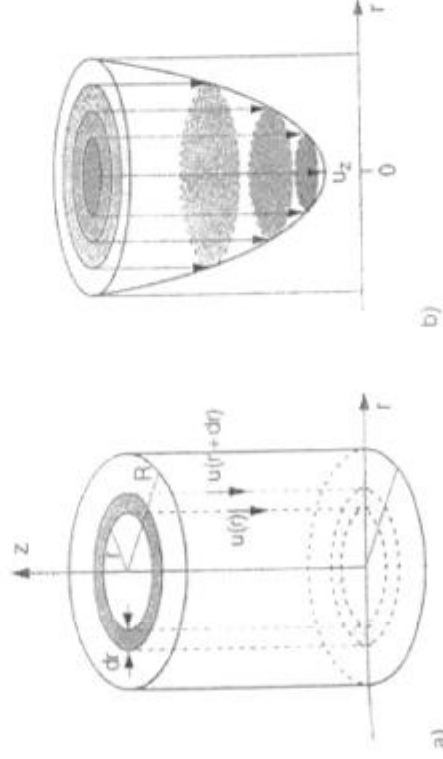


Abb. 20 Zur Herleitung des Geschwindigkeitsprofils einer laminaren Strömung in einem zylindrischen Rohr und des Hagen - Poiseulleschen Gesetzes.

Die Integration über r ergibt:

$$u(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{2\eta L} \frac{r^2}{2} + C$$

3.14 adiabatische Zustandsänderung

Einen Prozeß, bei dem das System mit der Umgebung keine Wärme austauscht, nennt man adiabatisch.

Dazu betrachtet man die reversible Ausdehnung einer bestimmten Gasmenge, die sich in einem thermisch isolierten Gefäß befindet, welches durch einen beweglichen Kolben verschlossen ist. Das Gas verrichtet Arbeit gegen den äußeren Druck, indem es den Kolben langsam nach außen bewegt.

Kann das Gas Wärme weder aufnehmen noch abgeben, so ist die Volumsarbeit gleich der Abnahme seiner inneren Energie. Bei der adiabatischen Expansion nimmt der Druck stärker ab, als bei der isothermen Expansion, weil ohne Wärmezufuhr die Temperatur sinkt.

Mit Hilfe der Zustandsgleichung idealer Gase und dem ersten Hauptsatz kann man die Kurve berechnen.

Mit $dU = C_V dT$ erhält man

$$dQ = dU - dW = C_V dT + pdV = 0$$

Mit dem Gasgesetz wird daraus

$$C_V dT + nRT \frac{dV}{V} = 0$$

und weiter

$$\frac{dT}{T} + \frac{nR}{C_V} \frac{dV}{V} = 0$$

Es ist $C_p - C_V = nR$, daher

$$\frac{nR}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} - 1 = \gamma - 1$$

Die Größe γ wird *Adiabaten-Exponent* genannt und ist der Quotient der Wärmekapazitäten

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

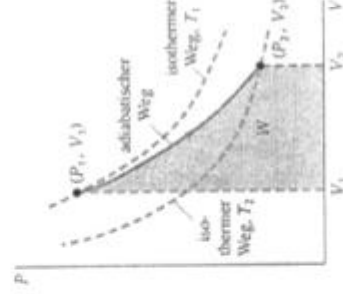


Abb. 51

Das p - V -Diagramm für die adiabatische Expansion eines idealen Gases. Die gestrichelten Kurven sind die Isothermen der Anfangs- und der Endtemperatur. Die durchgezogene Kurve für die adiabatische Expansion verläuft steiler als die Isothermen, weil die Temperatur während dieses Vorganges abnimmt.

Damit wird die obige Gleichung zu

Archimedisches Prinzip:

Durch den Auftrieb verliert ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper (scheinbar) so viel an Gewicht, wie die von ihm verdrängte Flüssigkeitsmenge wiegt:

$$G'_K = m_K g - F_A = G_K - G_{Fl}$$

(G'_K verringerte Gewichtskraft des Körpers in der Flüssigkeit verursacht durch den Auftrieb)

Natürlich tritt eine Auftriebskraft auch in Gasen auf, ist aber wegen der geringen Dichte von Gasen entsprechend kleiner. Der statische Auftrieb in Gasen bildet die Grundlage für die Ballonfahrt.

4.3 Strömende Flüssigkeiten

4.3.1 Kontinuitätsgleichung

Gegeben sei ein waagrechtes Rohr in x - Richtung mit veränderlichem Querschnitt A . Ein Flüssigkeitsvolumen $dV=A dx$ hat die Masse $dm=\rho dV=\rho A dx$. Durch den Querschnitt A_1 strömt pro Zeiteinheit eine Masse die gegeben ist durch:

$$\frac{dm}{dt} = \rho A_1 \frac{dx}{dt} = \rho A_1 u_{x_1}$$

Bei $x=x_0$ möge sich das Rohr auf den Querschnitt A_2 verengen.

Bei inkompressiblen Flüssigkeiten ist die Dichte ρ konstant. Da die Flüssigkeit nirgendwo seitlich aus der Röhre austreten kann, muß pro Zeiteinheit durch den verengten Querschnitt A_2 dieselbe Flüssigkeitsmenge fließen wie durch A_1 . Daraus folgt:

$$\rho A_1 u_{x_1} = \rho A_2 u_{x_2}$$

und daraus die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}} = \frac{A_2}{A_1}$$

In Worten: Die Fließgeschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt proportional zu den Rohrquerschnitten.

Mit dem idealen Gasgesetz und der Beziehung $nR = C_p - C_v$ wird daraus

$$W_{\text{adab}} = C_v \left(\frac{p_2 V_2}{nR} - \frac{p_1 V_1}{nR} \right) = \frac{C_v}{C_p - C_v} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

Einsetzen von $\gamma = C_p / C_v$ liefert:

$$W_{\text{adab}} = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1}$$

3.15 Wärmekraftmaschinen und der zweite Hauptsatz

Die nach dem ersten Hauptsatz mögliche Umkehrung - die vollständige Umwandlung von Wärme oder innerer Energie in mechanische Arbeit - kann in Wirklichkeit nicht ablaufen, ohne daß auch andere Prozesse beteiligt sind. Der prinzipielle Unterschied zwischen Wärme und Arbeit hat damit zu tun, daß manche Prozesse irreversibel sind.

Dazu einige Beispiele:

Gleitet zum Beispiel ein Klotz auf der rauhen Oberfläche einer schiefen Ebene herab, so geht seine kinetische Energie durch Reibung in Wärme über, die zur Erhöhung der inneren Energie des Klotzes und der Ebene führt. Niemand aber beobachtet man, den vom ersten Hauptsatz durchaus zugelassenen umgekehrten Prozeß, daß der Klotz aufwärts gleitet und dabei sich und die Ebene abkühlt. Daher ist die Umwandlung von kinetischer Energie in Wärme ein irreversibler Vorgang, d.h. er kann in der anderen Richtung nicht spontan ablaufen.

Wenn man zum Beispiel ein Gefäß mit hellem Sand nimmt und darauf eine Schicht dunklen Sand schüttet, so werden sich nach kräftigem Rütteln beide Sandarten vermischt haben. Es gibt aber keine Methode, sie wieder zu entmischen, außer körnchenweisem Sortieren oder chemischer Trennung. Beides aber erfordert einen Energieaufwand.

Ein anderer irreversibler Prozeß ist die Wärmeleitung. Bringt man einen heißen Körper mit einem kalten in Kontakt, so fließt Wärme vom heißen zum kalten Körper, bis beide nach einer gewissen Zeit dieselbe Temperatur haben. Niemand aber wird man beobachten, daß bei zwei Körpern gleicher Temperatur, wenn sie in Kontakt sind, sich der eine erwärmt und der andere abkühlt.

Auf die mit dem zweiten Hauptsatz zusammenhängenden Gesetzmäßigkeiten stieß man erst bei dem Versuch, die Effizienz von Dampfmaschinen zu verbessern.

Abb 52 zeigt schematisch die Arbeitsschritte des Kreisprozesses, der in einer Wärmekraftmaschine abläuft. Zuerst wird das Gas (Wasserdampf) im Zylinder mit dem Anfangsdruck p_1 bei konstantem Volumen erwärmt, bis der Druck p_2 erreicht ist. Die zugeführte Wärmemenge ist Q_1 . Dann wird der Kolben mit Hilfe des Massestückes G im Gleichgewicht gehalten. Nun wird die Wärme Q_2 zugeführt und zwar wegen des Massestückes bei konstantem Druck, so daß das Gas expandiert. Dabei wird das Massestück um die Höhe h angehoben. Jetzt wird der Kolben fixiert und es wird die Wärmemenge Q_3 abgeführt, bis wieder der Anfangsdruck p_1 erreicht ist. Schließlich wird die Fixierung entfernt und das Gas bei konstantem Druck bis zum Anfangsvolumen V_1 komprimiert. Dabei wird die Wärmemenge Q_4 abgeführt.

Während bei festen Körpern die Atome an feste Ruhelagen gebunden sind, um die sie Schwingungen kleiner Amplituden machen können, sind die Flüssigkeitsatome bzw. Moleküle innerhalb des Flüssigkeitsvolumen frei beweglich. In ruhenden Flüssigkeiten treten keine Tangentialkräfte auf, da diese die Flüssigkeit solange verformen würden, bis diese Tangentialkräfte verschwinden.

Beispiel: Oberfläche einer Flüssigkeit in einem rotierenden Gefäß,

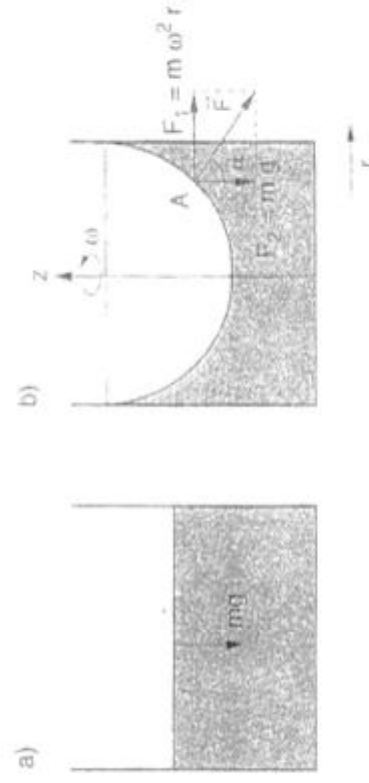


Abb. 17 a) Wirkt nur die Schwerkraft, so bildet die Oberfläche der Flüssigkeit eine horizontale Ebene.

Abb. 17 b) Die Oberfläche einer Flüssigkeit in einem um die z -Achse rotierenden Zylinder, stellt sich so ein, daß die resultierende Kraft \vec{F} aus Schwerkraft mg in ($-z$)-Richtung und Zentrifugalkraft $m\omega^2 r$ in r -Richtung senkrecht zur Oberfläche steht. Für die Steigung der Oberflächenschnittkurve $z(r)$ im Punkt A ist daher

$$\tan \alpha = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g}.$$

Andererseits ist die Steigung der Kurve durch

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dr}$$

gegeben.

Integration ergibt:

$$z(r) = \frac{\omega^2}{g} \int r dr = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C$$

Aus der Bedingung $z(0) = z_0$ wird $C = z_0$ folgt:

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0.$$

Die Flüssigkeitsoberfläche ist ein Rotationsparaboloid, dessen Achse mit der Drehachse zusammenfällt.

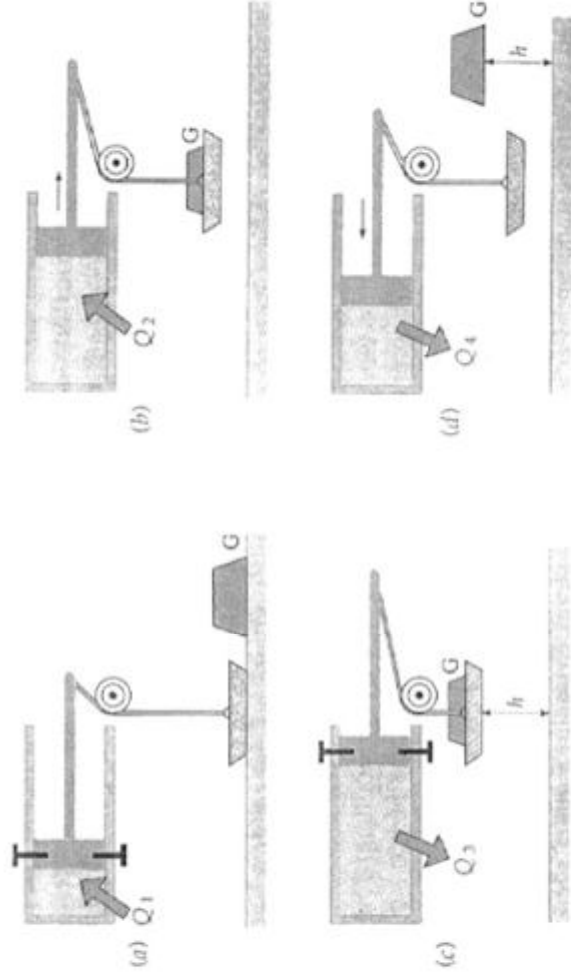


Abb. 52

Der Kreisprozeß einer einfachen Wärmekraftmaschine. a) Bei konstantem Volumen (der Kolben wird festgehalten) wird das Gas erwärmt. Dabei steigt der Druck. Dann wird ein Massestück G auf die Schale gelegt (b), so daß der Kolben im Gleichgewicht gehalten wird. Nach Loslassen des Kolbens wird bei konstantem Druck weitere Wärme zugeführt, das Gas expandiert und hebt die Masse an. c) Der Kolben wird wieder fixiert, während das Gas auf die Anfangstemperatur abgekühlt wird. d) Das Massestück und die Fixierung werden entfernt und das Gas wird bei konstantem Druck auf den Anfangszustand komprimiert. e) Das p-V-Diagramm des gesamten Prozesses. Im Schritt b) verrichtet das Gas Arbeit und im Schritt d) wird Arbeit am Gas verrichtet. Die vom Gas netto abgegebene Arbeit entspricht der getönten

Fläche.

Es ist aber prinzipiell unmöglich, eine Wärmekraftmaschine mit $\varepsilon = 1$ zu entwickeln. Das besagt der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in einer seiner möglichen Formulierungen, auch das Prinzip von Thomson genannt. Es lautet:

Es ist unmöglich, eine zyklisch arbeitende Wärmekraftmaschine zu konstruieren, die keinen anderen Effekt bewirkt, als Wärme aus einem Reservoir zu entnehmen und eine äquivalente Menge an Arbeit zu verrichten (Unmöglichkeit des „Perpetuum mobile“).

Entscheidend ist der Begriff *zyklisch arbeitend*. In einem nicht zyklischen Prozeß kann sehrwohl eine bestimmte Wärmemenge vollständig in Arbeit umgewandelt werden, beispielsweise durch isotherme Expansion eines idealen Gases. Aber danach hat das Gas nicht mehr denselben Zustand wie am Anfang und es muß Arbeit aufgewendet werden um wieder dahin zu gelangen.

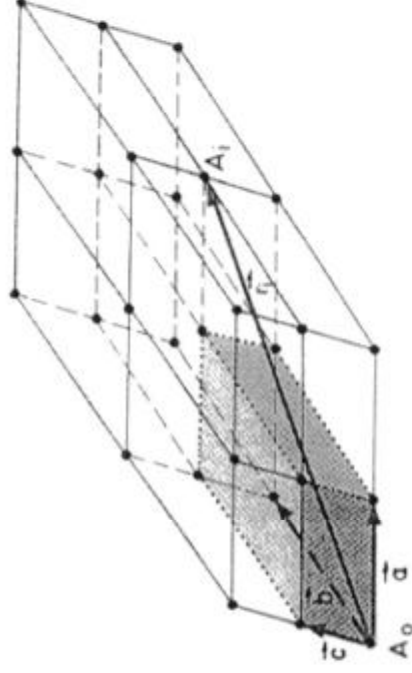


Abb. 15 Regelmäßiger atomarer Aufbau eines kristallinen Festkörpers. Die Basisvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ spannen eine **Einheitszelle** mit dem Volumen $V_E = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ auf. Der Ortsvektor des hier gezeigten Gitteratoms A_i ist $\vec{r}_i = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Man kann die Kräfte zwischen den Atomen durch Federn darstellen, wobei die Federkonstanten in den verschiedenen Richtungen durchaus verschieden sein können.

Bei der absoluten Temperatur T schwingen die Atome auf Grund ihrer mittleren kinetischen Energie $\bar{E}_{kin} = (1/2)k_B T$ pro Freiheitsgrad um ihre Ruhelagen r_0 , k_B ist die Boltzmann Konstante (wird später in der Thermodynamik gezeigt).

Wird die Temperatur über die Schmelztemperatur erhöht, so wird die kinetische Energie (Schwingungsenergie der Atome) so groß, daß die Bindungsenergie nicht mehr ausreicht, um die Atome auf ihren Gitterplätzen festzuhalten und der Festkörper geht in den flüssigen Zustand über.

Der flüssige Aggregatzustand und auch der amorphe Festkörper ist dadurch gekennzeichnet, daß es keine **Fernordnung** (wie im kristallinen Festkörper) sondern nur mehr **Nahordnung** gibt. D.h. in einer Flüssigkeit oder einem amorphen Festkörper gibt es nur mehr eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(r)$, für die Existenz eines Nachbaratoms im Abstand r . $W(r)$ hat im Abstand r_0 ein Maximum hat.

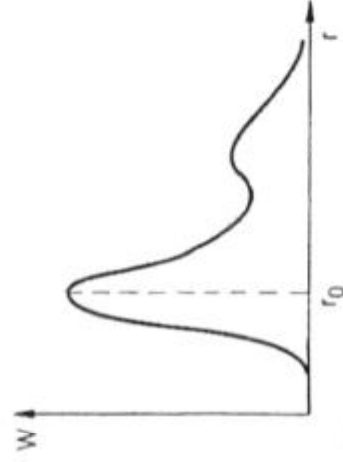


Abb. 16 Wahrscheinlichkeit $W(r)$ daß ein Atom A_0 in einer Flüssigkeit einen Abstand r von einem beliebige herausgegriffenen anderen Atom A_i in der Flüssigkeit oder im amorphen Festkörpers hat.

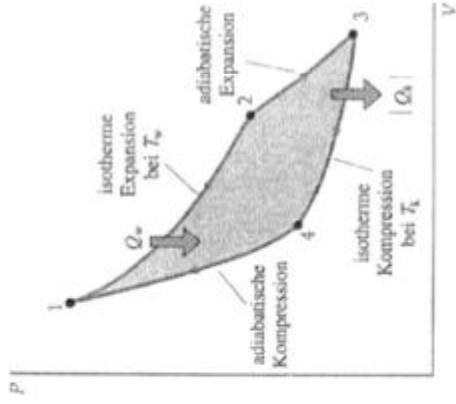


Abb. 53

Beim Carnot-Kreisprozeß, hier für ein ideales Gas, werden alle Schritte reversibel durchgeführt. Während der isothermen Expansion von 1 nach 2 wird Wärme aufgenommen. Von 2 nach 3 wird adiabatisch expandiert, bis die Temperatur gesunken ist. Dann wird von 3 nach 4 isotherm komprimiert, wobei wieder Wärme abgegeben wird. Schließlich wird von 4 nach 1 adiabatisch komprimiert, bis wieder die Ausgangstemperatur erreicht ist.

In Abb 53 dient ein ideales Gas als Arbeitssubstanz. Die Schritte sind in der Bildlegende beschrieben und der reversibel durchgeführte Gesamtvorgang heißt *Carnot-Kreisprozeß*. Die vom Gas abgegebene Nettoarbeit entspricht der getönten Fläche im p - V -Diagramm.

Man kann den Wirkungsgrad eines solchen Prozesses als Funktion der Temperaturen der Reservoirs berechnen. Q_w wird dem wärmeren Reservoir entnommen und $|Q_k|$ an das kältere abgeführt. Bei der Expansion von 1 nach 2 wird Arbeit verrichtet. Wegen der isothermen Bedingung bleibt die innere Energie des Gases dabei unverändert und es folgt

$$(Q_w)_{rev} = -W = \int_1^2 p dV = \int_1^2 \frac{nRT_w}{V} dV$$

$$(Q_w)_{rev} = nRT_w \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Bei der isothermen Kompression von 3 nach 4 wird die Wärme $|Q_k|$ bei der Temperatur T_k an das kältere Reservoir abgegeben. Auch hier ändert sich die innere Energie des Gases wegen der konstanten Temperatur nicht und die abgeführte Wärmemenge ist ebenso groß wie die aufgenommene Volumsarbeit

$$|(Q_k)_{rev}| = nRT_k \ln \frac{V_3}{V_4}$$

Der Quotient beider Wärmemengen ist

$$\frac{|(Q_k)_{rev}|}{(Q_w)_{rev}} = \frac{T_k \ln(V_3/V_4)}{T_w \ln(V_2/V_1)}$$

Bei einer reversiblen adiabatischen Expansion eines idealen Gases gilt, wie schon gezeigt

$$TV^{\gamma-1} = \text{konst.}$$

Damit folgt für die Expansion von V_2 auf V_3

$$T_w V_2^{\gamma-1} = T_k V_3^{\gamma-1}$$

Geschwindigkeit \vec{v}_i . Seine kinetische Energie bei der Rotation des Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse A ist dann wegen \vec{v}_i senkrecht zu \vec{r}_i

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_{i\perp}^2 \omega^2.$$

Summation über alle Massenpunkte Δm_i ergibt die gesamte Rotationsenergie des Körpers

$$E_{rot} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_{i\perp}^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V r_{\perp}^2 dm$$

Man nennt den Ausdruck:

$$\int_V r_{\perp}^2 dm = \int_V r_{\perp}^2 \rho dV \equiv I$$

das **Trägheitsmoment** des Körpers bezüglich der Achse A , wobei r_{\perp} der senkrechte Abstand des Massenpunktes dm von der Drehachse A ist.

Mit dieser Definition erhält man für die **Rotationsenergie**

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

3.6 Drehimpuls eines starren Körpers

Der Drehimpuls des Massenelements Δm_i bezüglich der Rotationsachse ist

$$\vec{L} = \vec{r}_{i\perp} \times (\Delta m_i \vec{v}_i) = r_{i\perp}^2 \Delta m_i \vec{\omega}$$

und damit als Drehimpuls für den gesamten Körper

$$\vec{L} = I \vec{\omega}.$$

Daraus folgt für die kinetische Energie, ausgedrückt durch das Trägheitsmoment:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

Das Trägheitsmoment eines Körpers ist immer auf eine bestimmt Achse bezogen und hängt von der Lage dieser Achs im Körper ab.

zugeführte oder abgegebene Wärmemenge bestimmen und schließlich obige Gleichung anwenden:

Nach dem ersten Hauptsatz ist die vom Gas aufgenommene Wärmemenge dQ gleich der Änderung der inneren Energie dU , abzüglich der verrichteten Arbeit dW . Es gilt daher:

$$dQ = dU - dW = dU + p dV$$

Mit $dU = C_v dT$ und dem idealen Gasgesetz folgt

$$dQ = C_v dT + nRT \frac{dV}{V}$$

Da dQ kein vollständiges Differential ist, ist die Gleichung in dieser Form nicht integrierbar. Division durch T liefert

$$\frac{dQ}{T} = C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

Durch Integration erhält man folgende allgemeine Gleichung:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

- *Entropieänderung bei isobarer Zustandsänderung:*

Man betrachte eine Substanz, die bei konstantem Druck von T_1 auf T_2 erwärmt wird. Sie nimmt dabei die Wärmemenge dQ auf und ihre Temperatur erhöht sich um dT . Es gilt

$$dQ = C_p dT$$

Wird die Wärme durch viele kleine Schritte jeweils reversibel aufgenommen, so ist

$$dS = \frac{dQ}{T} = C_p \frac{dT}{T}$$

Durch integrieren erhält man

$$\Delta S = C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Weil die Entropie eine Zustandsfunktion ist, hängt ihre Änderung nicht von der Art des Prozesses ab. Sofern sich der Druck nicht ändert, liefert diese Gleichung die Entropiedifferenz beim Erwärmen der Substanz.

- *Entropieänderung bei isothermer Zustandsänderung:*

Man betrachte die reversible Expansion eines idealen Gases bei der Temperatur T vom Anfangsvolumen V_1 auf das Endvolumen V_2 . Für $T_2 = T_1$ gilt

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

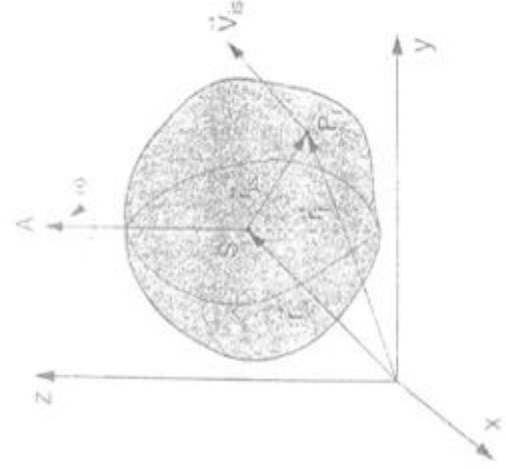


Abb.13 Zur Bewegung eines starren Körpers.

Der Vektor

$$\frac{d\vec{r}_{is}}{dt} = \vec{v}_{is} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$$

gibt die Relativgeschwindigkeit des Punktes P_i relativ zum Schwerpunkt S an.

In einem starren Körper sind alle Abstände fest, d.h.

$$|\vec{r}_{is}| = \text{const}$$

In Kapitel 1.2.3.3 wurde gezeigt, daß bei der ebenen Kreisbewegung die Geschwindigkeit eines Punktes seinem Betrag nach gleich

$$v = r\omega$$

ist.

Will man nun die räumliche Lage der Ebene angeben, in der die Kreisbewegung abläuft, so ist es zweckmäßig, einen Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ anzugeben, der senkrecht auf der Bewegungsebene steht.

Der Vektor $\vec{\omega}$ ist definiert durch die folgende Gleichung:

$$\vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Wenn man diese allgemeine Überlegung auf die Bewegung des Punktes P_i um den Schwerpunkt überträgt (siehe Abbildung 13) ergibt sich:

$$\vec{v}_{is} = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{is})$$

wobei $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit ist, mit der sich P_i um die Achse A durch den Schwerpunkt S senkrecht zu \vec{v}_{is} dreht.

Es werde die Wärmemenge Q von einem Reservoir der Temperatur T_W zu einem Reservoir mit T_K übertragen. Der Zustand eines Reservoirs wird nur durch seine Temperatur und seine innere Energie bestimmt. Die Entropieänderung eines Wärmereservoirs aufgrund von Wärmeübertragung ist unabhängig davon, ob der Austausch reversibel verläuft oder nicht. Es gilt

$$\Delta S_W = -\frac{|Q|}{T_W}$$

Dem kälteren Reservoir wird die gleiche Menge zugeführt, also

$$\Delta S_K = +\frac{|Q|}{T_K}$$

Die gesamte Entropieänderung des Universums ist damit

$$\Delta S_U = \frac{|Q|}{T_K} - \frac{|Q|}{T_W}$$

Mit dem vorher definierten Prinzip erhält man

$$W = T_K \Delta S_U = |Q| \left(1 - \frac{T_K}{T_W} \right)$$

Dies ist genau die Arbeit, die eine Carnot-Maschine verrichten könnte. Sie entnimmt dem wärmeren Reservoir die Wärmemenge $|Q|$ und verrichtet die Arbeit $|W| = \varepsilon_c |Q|$.

3.18.1 Entropie und Wahrscheinlichkeit

Bei einem irreversiblen Prozeß kann zwar die Entropie eines gegebenen Systems abnehmen, aber die Entropie des Universums (System plus Umgebung) nimmt zwangsläufig zu.

Der Grund dafür liegt in folgender Aussage:

Ein Zustand hoher Ordnung hat eine geringe Wahrscheinlichkeit, ein Zustand niedriger Ordnung dagegen eine hohe Wahrscheinlichkeit. Bei einem irreversiblen Prozeß geht das Universum in einen Zustand höherer Wahrscheinlichkeit über.

Bei der freien Expansion eines idealen Gases erhöht sich die Entropie des Universums. Die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten, hat das Gas nun nicht mehr, weil es ein größeres Volumen bei geringerem Druck einnimmt.

Warum kann sich das Gas bei der freien Expansion nicht auf ein kleineres Volumen zusammenziehen, obwohl dies dem ersten Hauptsatz nicht widerspricht?

Der Grund liegt darin, daß eine solche Kompression extrem unwahrscheinlich ist. Angenommen die Gasmenge bestehe nur aus 10 Teilchen. Für jedes beliebige Teilchen beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß es sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in der einen Hälfte eines Volumens aufhält $\frac{1}{2}$. Für zwei Teilchen somit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, für drei $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Bei 10 Teilchen dagegen $(\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{1024}$. Schon bei 50 Teilchen beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß sich alle

Beispiele für die Berechnung des Volumens eines Quaders und einer Kugel:
Für einen Quader ergibt sich z.B.

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dy dz = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)$$

und für eine Kugel mit dem Radius R :

$$V = \int_{\varphi=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

3.2 Massenschwerpunkt

Ähnlich wie beim Schwerpunkt diskreter Massen, kann auch beim starren Körper die Position des Schwerpunkts durch:

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^N \Delta m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \rho(\vec{r}_i) \Delta V_i$$

angegeben werden.

Durch den Grenzübergang $\Delta V \rightarrow 0$ geht diese Summe über in

$$\vec{r} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV.$$

Dies entspricht den drei Komponentengleichungen:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{M} \int_V x \rho(x, y, z) dV, \\ y_s &= \frac{1}{M} \int_V y \rho(x, y, z) dV, \\ z_s &= \frac{1}{M} \int_V z \rho(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

Für den homogenen Körper ($\rho = \text{const}$) folgt für den Ortsvektor des Massenschwerpunkts:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$$

Das gesamte Drehmoment des Systems ist daher gegeben durch:

$$\vec{D} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2)$$

also gleich der Summe der Einzeldrehmomente.

Wirken keine äußeren Kräfte, so ist das Drehmoment, das an dem System angreift, Null!

2.6 Drehimpuls

Der gesamte Drehimpuls \vec{L} dieses Systems (bestehend aus zwei Massen), bezogen auf den Nullpunkt ist:

$$\vec{L} = (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{p}_2).$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses ergibt dann das Gesamtdrehmoment:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) = \vec{D}$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses eines Systems von Teilchen, bezogen auf einen beliebigen Punkt, ist gleich dem Gesamtdrehmoment aller äußeren Kräfte bezogen auf diesen Punkt.

Diese Aussagen über Drehimpuls und Drehmoment können natürlich auf Systeme mit beliebig vielen Teilchen verallgemeinert werden.

138.038

Grundlagen der Physik

Teil 1: Mechanik und Thermodynamik

Vortragende: E. Bauer, N. Gurker, P. Pongratz

TU Wien, März 2009

Bewegen sich die einzelnen Massen mit den Geschwindigkeiten

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

so definiert man für die **Schwerpunktsgeschwindigkeit**

$$\vec{v}_s = \frac{d\vec{r}_s}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

2.3 Impuls

Der Gesamtimpuls \vec{P} des Systems ergibt sich aus den Teilchenimpulsen

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_s$$

(mit M der Gesamtmasse).

Wirken keine äußeren Kräfte auf das System, treten also nur Wechselwirkungen der einzelnen Teilchen untereinander auf (man sagt das System ist abgeschlossen), dann folgt:

Der Massenschwerpunkt eines abgeschlossenen Systems hat einen zeitlichen konstanten Impuls.

Wirken dagegen äußere Kräfte auf das System dann folgt:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

führt man nun noch die **Schwerpunktsbeschleunigung** ein

$$\vec{a}_s = \frac{d\vec{v}_s}{dt}$$

so ergibt sich für das 2. Newtonsche Gesetz dieses Systems:

$$\vec{F} = M \vec{a}_s$$

Der Schwerpunkt eines beliebigen Systems von Massenpunkten bewegt sich so, als ob er ein Körper mit der Gesamtmasse M wäre und auf ihn die gesamte äußere Kraft wirkt.

2.4 Schwerpunktsystem

Oft ist es zweckmäßig, ein Koordinatensystem zu wählen, das den Schwerpunkt als Nullpunkt hat und sich mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit gegen das ortsfeste Laborsystem bewegt. Dieses System bezeichnet man als **Schwerpunktsystem**.

INHALTSVERZEICHNIS

MECHANIK

- 1. Mechanik des Massenpunktes**
 - 1.1 Physikalische Größen und Einheiten
 - 1.2 Kinematik
 - 1.2.1 Geschwindigkeit
 - 1.2.2 Beschleunigung
 - 1.2.3 Berechnung der Bahnkurve
 - 1.2.3.1 Gleichförmig geradlinige Bewegung
 - 1.2.3.2 Gleichförmig beschleunigte Bewegung
 - 1.2.3.3 Gleichförmige Kreisbewegung
 - 1.3 Dynamik
 - 1.3.1 Newtonsche Gesetze
 - 1.3.2 Begriff des Feldes
 - 1.3.2.1 Gravitationsfeld
 - 1.3.3 Kepler Gesetze
 - 1.3.3.1 Bestimmung der Gravitationskonstante
 - 1.3.3.2 Gleichheit von träger und schwerer Masse
 - 1.3.3.4 Bewegung im homogenen Schwerfeld
 - 1.3.4 Impuls
 - 1.3.5 Drehimpuls und Drehmoment
 - 1.3.6 Arbeit
 - 1.3.6.1 Berechnung der Arbeit in einem gegebenen Kraftfeld
 - 1.3.7 Konservative Kraftfelder
 - 1.3.8 Potentialfelder
 - 1.3.9 Potentielle und kinetische Energie eines Massenpunkte
 - 1.3.10 Erhaltungssätze
 - 1.3.10.1 Allgemeines über Erhaltungssätze
 - 1.3.10.2 Energieerhaltungssatz
 - 1.3.10.3 Bewegungsgleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators
 - 1.3.10.4 Impulserhaltungssatz
 - 1.3.10.5 Drehimpulserhaltungssatz
- 2. Mechanik von Massenpunktsystemen**
 - 2.1 Massenschwerpunkt
 - 2.2 Geschwindigkeit
 - 2.3 Impuls
 - 2.4 Schwerpunktsystem
 - 2.5 Drehmoment
 - 2.6 Drehimpuls
- 3. Mechanik des starren Körpers**
 - 3.1 Modell des starren Körpers
 - 3.2 Massenschwerpunkt
 - 3.2.1 Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel
 - 3.2.3 Bewegung eines starren Körpers
 - 3.4 Kräfte am starren Körper

Bewegung: Berechnung mit der allgemeinen Gleichung für eine harmonische

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

so folgt für die **Kreisfrequenz**

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

und für die **Amplitude**:

$$A = \sqrt{\frac{2E_{\text{ges}}}{D}}$$

Die Kreisfrequenz ω ist **nicht von der Gesamtenergie abhängig**, dagegen bestimmt das **Quadrat der Amplitude die Gesamtenergie!** Besteht das betrachtete System aus einer Feder und der Masse m so ist D die Federkonstante bei dieser Anordnung.

1.3.10.4 Impulserhaltung

Innerhalb eines abgeschlossenen Systems, (d.h. es wirkt keine Kraft von außen, $\vec{F} = 0$), ist der Gesamtimpuls aller physikalischen Objekte, die sich in diesem System befinden, konstant. Aus $\vec{F} = 0$ folgt:

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} = 0) dt = 0 \rightarrow \int_{\vec{v}(t_1)}^{\vec{v}(t_2)} m d\vec{v} = m\vec{v}(t_2) - m\vec{v}(t_1) = 0$$

Der Impulserhaltungssatz gilt auch für relativistische Systeme, wo m geschwindigkeitsabhängig ist.

1.3.10.5 Drehimpulserhaltungssatz

Der Drehimpuls \vec{L} ist eine Erhaltungsgröße. In Abwesenheit eines äußeren Drehmoments $\vec{D} = \vec{0}$ bleibt der Gesamtdrehimpuls eines Systems erhalten.

$$\vec{D} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

$d\vec{L} / dt = 0$ ist insbesondere auch dann der Fall, wenn die Kraft auf einen Massenpunkt in Richtung des Ortsvektors zeigt, d.h.

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0 \text{ da } \vec{r} \parallel \vec{F}$$

was in einem Zentralfelder (Gravitationsfelder) immer der Fall ist.

1. Mechanik des Massenpunktes

1.1. Physikalische Größen und Einheiten

Die Physik ist eine quantitative Wissenschaft, deren Ziel es ist Naturserscheinungen (z.B. Bewegungsabläufe, elektrische Entladungen, radioaktive Strahlung, usw.) zu beschreiben, wozu sich die Physik mathematischer Methoden (Formeln) bedient. Quantitative Angaben bezüglich der Naturserscheinungen nennt man **physikalische Größen** (z.B. Volumen, Temperatur, elektrische Feldstärke usw.).

Eine physikalische Größe zu messen bedeutet immer, sie mit einer definierten Einheit dieser Größe zu vergleichen.

Jede physikalische Größe ist daher als Produkt aus einer Zahl und einer Einheit gegeben

$$\text{Physikalische Größe} = \{\text{Zahlenwert}\} \times [\text{Einheit}]$$

(Beispiel: 1,25 m ist eine physikalische Größe, 1,25 ist der {Zahlenwert} und [m] die Einheit).

Die Einheiten aller physikalische Größen lassen sich auf eine kleine Zahl von fundamentalen Einheiten (**Basiseinheiten**) zurückführen, welche durch genau definierte Meßvorschriften jederzeit reproduziert werden können.

Im weltweit am weitesten verbreiteten System, dem **SI System** (System International d'Unités), werden **sieben** Basiseinheiten durch Meßvorschriften festgelegt, es sind dies:

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichtstärke	Candela	cd
Stoffmenge	Mol	mol

(Beispiel: Das Meter wird als jene Strecke definiert die das Licht im Vakuum in einer Zeit von $1/c$ zurücklegt, ($c = \text{Lichtgeschwindigkeit} = 299792458 \text{ m s}^{-1}$).

Bei allen anderen Einheiten physikalischer Größen handelt es sich um **abgeleitete Einheiten**.
(Beispiel: Die Einheit der Kraft (das Newton) ergibt sich aus dem 2. Newtonschen Gesetz: Kraft [Newton] = Masse [kg] x Beschleunigung [m s^{-2}] daraus folgt $1[\text{N}] = 1 [\text{kg m s}^{-2}]$).

Einige häufig benutzte abgeleitete Einheiten haben spezielle Namen erhalten, wie im obigen Beispiel, die Einheit für die Kraft, das Newton.

In einem abgeschlossenen System ist die Summe aus kinetischer und potentiellen Energie zeitlich konstant.

Im folgenden Beispiel soll gezeigt werden, daß Bewegungsgleichungen auch aus den Erhaltungssätzen hergeleitet werden können.

1.3.10.2.1 Bewegungsgleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators

(Berechnung mit dem Energieerhaltungssatz)

Eine harmonische Bewegung kommt zustande, wenn die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft proportional zu seinem Abstand von einem gegebenen Punkt im Raum ist (z. B. Masse an einer Feder).

Aus dem Kraftfeld des eindimensionalen harmonischen Oszillators $\vec{F} = D \vec{x}$ folgt für das Potential in x -Richtung:

$$V(x) = \frac{1}{2} Dx^2$$

Das Potential wird durch eine um $x=0$ symmetrische Parabel beschrieben.

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt:

$$E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E_{ges}$$

Der Maximalwert der potentiellen Energie und damit der Auslenkung ergibt sich aus:

$$\frac{1}{2}Dx_{max}^2 = E_{ges} \rightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{2}{D}E_{ges}}, \quad x_{min} = -\sqrt{\frac{2}{D}E_{ges}}$$

Ganz allgemein gilt: Bei einer harmonischen Bewegung (Kraft ist prop. zur Auslenkung) ist die Gesamtenergie des Systems proportional zum Quadrat der Amplitude (größte Auslenkung). Diese Aussage gilt auch für elektromagnetische Wellen, d.h., auch für Licht, wie später gezeigt werden wird.

Zur Berechnung der Bewegungsgleichung geht man von

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E_{ges}$$

aus und löst diese Gleichung man v auf

Die Beschleunigung ist eine aus Geschwindigkeit und Zeit abgeleitete Vektorgroße.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung des Geschwindigkeitsvektors (bzw. die zweite Ableitung des Ortsvektors) und ist selbst wieder ein Vektor.
Einheit: [m s⁻²].

1.2.3 Berechnung der Bahnkurve

Für einen bewegten Punkt P ist der Ortsvektor zeitabhängig und beschreibt die **Bahnkurve**

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Ist die Zeitabhängigkeit der Beschleunigung $\vec{a}(t)$ bekannt, so kann die **Bahnkurve** folgendermaßen berechnet werden:

Erster Schritt:

Durch Integration zwischen den Zeitpunkten $t' = t_0$ und $t' = t$ folgt aus

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t'=t_0}^{t'=t} \vec{v}(t') dt' \quad (1)$$

Die Funktion $\vec{v}(t)$ ist im allgemeinen eine zeitabhängige Funktion.

Zweiter Schritt:

Durch Integration zwischen den Zeitpunkten $t'' = t_0$ und $t'' = t$ folgt aus

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$
$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t''=t_0}^{t''=t} \vec{a}(t'') dt'' \quad (2)$$

Die Funktion $\vec{a}(t)$ ist im allgemeinen eine zeitabhängige Funktion.

Dritter Schritt:

Einsetzen von Gl. (1) und Gl. (2) ergibt:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t'=t_0}^{t'=t} \left\{ \vec{v}(t_0) + \int_{t''=t_0}^{t''=t'} \vec{a}(t'') dt'' \right\} dt' =$$
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + (t - t_0) \vec{v}(t_0) + \int_{t'=t_0}^{t'=t} \left\{ \int_{t''=t_0}^{t''=t'} \vec{a}(t'') dt'' \right\} dt' \quad (3)$$

Gleichung (3) stellt die **allgemeinste Form der Bewegungsgleichung** dar!

verwendet man die Definition für den Impuls so folgt:

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$$

Die Arbeit die nötig ist, um einen Körper mit der Masse m von der Geschwindigkeit $\vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}_2$ zu ändern, resultiert aus der Differenz der kinetischen Energie des Körpers mit den Geschwindigkeiten \vec{v}_1, \vec{v}_2 .

$$W = E_{kin}(\vec{v}_2) - E_{kin}(\vec{v}_1)$$

Die Einheit der potentiellen und der kinetischen Energie ist die gleiche wie die der Arbeit: [Joule] = [Nm] = [kg m²s⁻²].

1.2.3.2 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Dabei gilt:

$$\vec{a}(t) = \text{const.} = \vec{a}_0,$$

dann folgt aus der allgemeinen Bewegungsgleichung:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + v_0(t - t_0) + \vec{a}_0 \int_{t'=t_0}^{t'=t} \int_{t''=t_0}^{t''=t'} dt'' dt'$$

Der letzte Term kann stufenweise integriert werden, die Integration nach t'' und liefert:

$$\vec{a}_0 \int_{t'=t_0}^{t'=t} (t' - t_0) dt'$$

Mit der Variablensubstitution $\tau = (t' - t_0)$ und $d\tau = dt'$ folgt:

$$\vec{a}_0 \int_{\tau=0}^{\tau=t-t_0} \tau d\tau = \frac{1}{2} \vec{a}_0 (t - t_0)^2$$

Daraus folgt für die Bahnkurve eines gleichmäßig beschleunigten Massenpunktes:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{a}_0}{2} (t - t_0)^2$$

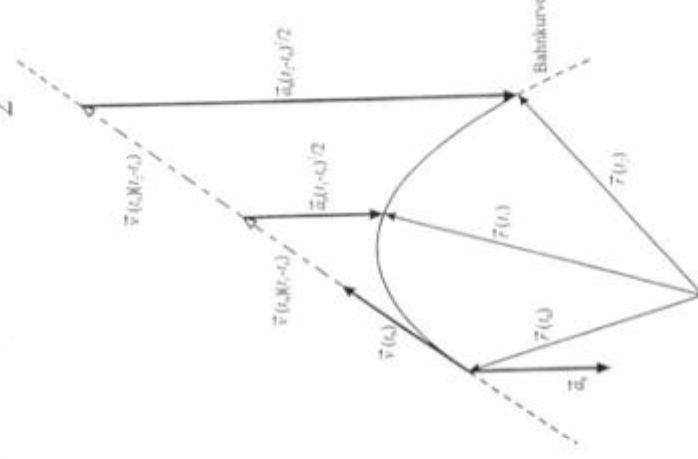


Abb. 3 Gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die tatsächliche Bewegung des Punktes läßt sich darstellen als Superposition (Überlagerung) der Bewegung auf einer Geraden in Richtung $\vec{v}(t_0)$ und einer geradlinigen beschleunigten Bewegung in Richtung von \vec{a}_0 .

In einem konservativen Kraftfeld ist die Arbeit bei der Bewegung eines Massenpunktes von einem festen Punkt \vec{r}_0 zu jedem beliebigen Punkt \vec{r} eine **skalare Funktion** von \vec{r} .

$$W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\{V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)\}$$

Die Funktion $W(\vec{r})$ ist bis auf eine beliebig wählbare additive Konstante und dem Vorzeichen gleich

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + V(\vec{r}_0)$$

Das skalare Feld $V(\vec{r})$ ist das dem konservativen Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ zugeordnete Potentialfeld.

a) Potentialfeld des homogenen Schwerfeldes

Mit

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g}$$

erhält man

$$V(\vec{r}) = -m \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{g} \cdot d\vec{r} + V(\vec{r}_0)$$

$$V(\vec{r}) = -m\vec{g} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + V(\vec{r}_0)$$

Wählt man $\vec{r}_0 = 0$ und $V(\vec{r}_0) = 0$, d.h. man setzt das Potential im Koordinatenursprung gleich Null, damit ist

$$V(\vec{r}) = -m\vec{g} \cdot \vec{r}$$

Wählt man wie üblich, das Koordinatensystem so, daß $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, ist so ergibt sich der bekannte Ausdruck:

$$V(z) = mgz$$

Potentialfeld des Newtonschen Gravitationsfeldes

$$\vec{F}(\vec{r}) = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$V(r) = + \underbrace{f m_1 m_2 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2}}_{-W(r)} + V(r_0) = -f m_1 m_2 \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right\} + V(r_0).$$

Wählt man nun $r_0 = \infty$ und legt die frei wählbaren Konstante $V(r_0)$ durch die Wahl $V(\infty) = 0$

Den Betrag von \vec{v} erhält man aus der Länge des Vektors $v = |\vec{v}|$, dazu bildet man das skalare Vektorprodukt $(\vec{v} \cdot \vec{v})$ und zieht die Wurzel:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \left\{ r^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \right\}^{1/2} = r\omega$$

$$v = r\omega$$

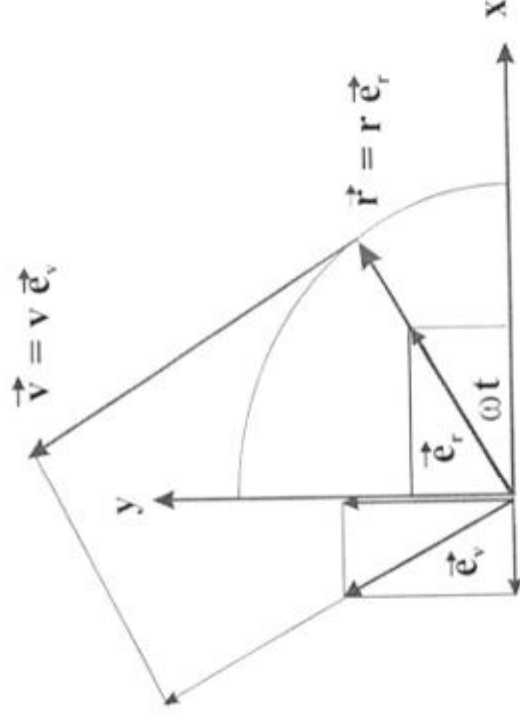


Abb.5. Darstellung des Geschwindigkeitsvektors der Kreisbewegung im ortsfesten (x,y) -Koordinatensystem.

Bei der Kreisbewegung ist der Geschwindigkeitsvektor parallel zum momentanen Tangentialvektor am Kreis.

Beschleunigung bei der Kreisbewegung

Betrag und Richtung des Beschleunigungsvektors:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ \vec{a} &= \frac{d}{dt} r\omega \left\{ -\sin \omega t \cdot \vec{e}_x + \cos \omega t \cdot \vec{e}_y \right\} = \\ &= r\omega \left\{ \frac{d}{dt} \left[-\sin \omega t \cdot \vec{e}_x + \cos \omega t \cdot \vec{e}_y \right] \right\} = \\ &= r\omega^2 \left[-\cos \omega t \cdot \vec{e}_x - \sin \omega t \cdot \vec{e}_y \right] \end{aligned}$$

$$\vec{a} = r\omega^2 (-\vec{e}_r)$$

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist die Beschleunigung immer zum **Kreismittelpunkt hin gerichtet!** (Zentrifugalbeschleunigung)

... der Schraubhöhe in Parameterdarstellung (s) lautet:

$$\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} a \cos s \\ a \sin s \\ cs \end{pmatrix} = a \cos s \vec{e}_x + a \sin s \vec{e}_y + cs \vec{e}_z$$

d.h die Spitze des Ortsvektors bewegt sich längs der Schraubenlinie. Die Ableitung des Ortsvektors nach dem Parameter s ergibt:

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} -a \sin s \\ a \cos s \\ c \end{pmatrix} ds = \{-a \sin s \vec{e}_x + a \cos s \vec{e}_y + c \vec{e}_z\} ds$$

Für die Integrationsgrenzen ergibt sich (durch Eliminieren des Parameters s):

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin s}{\cos s} = \tan s \rightarrow s = \arctan \frac{y}{x}$$

Für P_1 gilt

$$s_1 = \arctan \frac{0}{a} = 0; \pi; 2\pi; \dots$$

mit $z_1 = cs_1 = 0$ ist nur $s_1 = 0$ möglich!

Für P_2 gilt:

$$s_2 = \arctan \frac{0}{a} = 0; \pi; 2\pi; \dots$$

mit $z_2 = cs_2 = 2\pi c$ ergibt sich: $s_2 = 2\pi$,

(Hier muß man $\arctan x$ als mehrdeutige Funktion auffassen, da c Windungen der Schraube vorliegen)

Damit lautet das Integral:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -a \sin s \\ a \cos s \\ \frac{1}{cs+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin s \\ a \cos s \\ c \end{pmatrix} ds = \\ &= \int_0^{2\pi} \{a^2 \sin^2 s + a^2 \cos^2 s + \frac{c}{cs+1}\} ds = 2\pi a^2 + \ln(2\pi c + 1) \end{aligned}$$

1.3.7. Konservative Kraftfelder

Von **konservativen Kraftfelder** spricht man dann, wenn die Arbeit, die zur Verschiebung einer Masse m vom Punkt \vec{r}_1 zum Punkt \vec{r}_2 nötig ist, nur von den Endpunkten des Weges, nicht aber vom Weg selbst abhängt.

1.3 Dynamik

Die Dynamik beschäftigt sich mit der Frage nach der Ursache für die Änderung eines Bewegungszustandes.

Begriffe der Dynamik sind z.B. Kraft, Masse, Impuls, Energie, Arbeit usw...
Die Axiome auf denen die klassische Mechanik beruht sind die drei **Newtonschen Gesetze**.
Innerhalb der klassischen Mechanik können die Newtonschen Gesetze nicht auf fundamentalere Gesetzmäßigkeiten zurückgeführt werden!

1.3.1 Newtonsche Gesetze:

a) Trägheitsprinzip: (1. Newtonsche Gesetz)

In Worten:

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmig, geradliniger Bewegung, solange keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken.

Math. Formulierung:

$$\vec{a} = \vec{0} \dots \rightarrow \vec{F} = \vec{0},$$

b) Aktionsprinzip: (2. Newtonsche Gesetz)

In Worten:

Die gesamte auf einen Körper wirkende Kraft ist gleich dem Produkt aus Körpermasse und seiner Beschleunigung.

Math. Formulierung:

$$\vec{a} \neq \vec{0} \rightarrow \vec{F} = m_T \vec{a}$$

Bei konstanter äußerer Kraft \vec{F} hängt die Beschleunigung \vec{a} von der **trägen Masse** m_T ab. Für einen gegebenen Körper ist die Größe der Kraft proportional der Größe der Beschleunigung. Gleiche Kräfte beschleunigen Körper unterschiedlicher Massen verschieden stark. Jeder Körper hat also eine gewisse Fähigkeit, dem Beschleunigtwerden Widerstand zu leisten, ausgedrückt durch seine Masse, genauer seine **träge Masse** m_T . Daher kann man das Aktionsprinzip nicht nur als Bestimmungsgleichung für \vec{F} oder \vec{a} lesen, sondern auch als Definitionsgleichung für m_T . Diese Betrachtung ist deshalb bedeutungsvoll, da sie die einzige konsequente Definition der trägen Masse darstellt.

c) Reaktionsprinzip: (3. Newtonsche Gesetz)

In Worten:

Besteht zwischen zwei Körpern A und B eine Kraftwirkung, so ist die Kraft in der einen Richtung, die von A nach B wirkt, gleich groß der Kraft, die von B nach A wirkt, nur entgegengesetzt gerichtet.

Math. Formulierung:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Die Kraft ist eine durch das zweite Newtonsche Gesetze definierte Vektorgroße.

Die Einheit der Kraft ist das Newton $[N] = [kg \cdot m \cdot s^{-2}]$

Wirkt die Kraft \vec{F} im Zeitintervall t_1 bis t_2 so erhält man für die Impulsänderung:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Der Impuls eines Massenpunktes kann auch als Produkt von Masse und Geschwindigkeit dargestellt werden:

Aus dem 2. Newtonschen Gesetz folgt für die Kraft

$$F = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Damit erhält man:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \int_{\vec{v}(t_1)}^{\vec{v}(t_2)} d\vec{v} = m\vec{v}_2(t_2) - m\vec{v}_1(t_1)$$

Ein Körper mit der Masse m und der Geschwindigkeit \vec{v} hat einen Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

In einem abgeschlossenen System ist der Impuls konstant (siehe später).

1.3.5 Drehimpuls und Drehmoment

Ist in einem mechanischen System ein Punkt des Raumes vor anderen ausgezeichnet, so ist es oft sinnvoll, ihn als Ursprung eines Koordinatensystems zu wählen. Ist \vec{r} der Ortsvektor eines Massenpunktes in Bezug auf diesen Ursprung und \vec{p} sein Impuls, so heißt das Vektorprodukt:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

der **Drehimpuls** des Massenpunktes um den Ursprung.
Einheit: [kg m² s⁻¹]

Seine Zeitableitung ist dann:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \underbrace{\vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}}_0 = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times m \underbrace{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}_{=\vec{F}}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{D}$$

Das Vektorprodukt aus dem Ortsvektor und der Kraft heißt **Drehmoment** \vec{D} . Das Drehmoment ist ein Vektor der auf Ortsvektor \vec{r} und Kraft \vec{F} senkrecht steht.
Einheit: [N m]

1.3.3 Kepler Gesetze

Von Johannes Kepler (1571-1630) wurden die folgenden Gesetze über die Planetenbewegungen aus astronomischen Beobachtungen von Tycho Brahe (1546-1601) abgeleitet:

Erstes Keplersches Gesetz:

Die Planeten durchlaufen Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Zweites Keplersches Gesetz

Der „Leitstrahl“ von der Sonne zu den Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Drittes Keplersches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten T der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen a der Ellipsenbahnen.

Für Newton bildeten diese empirischen Befunde den wesentlichen Anstoß für seine dynamischen Grundgesetze (drei Newtonschen Gesetze) und das Gravitationsgesetz.

1.3.3.1 Bestimmung der Gravitationskonstante

Die Gravitationskonstante f konnte Newton nicht aus astronomischen Messungen bestimmen, da ihm die Massen der Himmelskörper nicht bekannt waren. Die Bestimmung von f muß mit bekannten Massen im Labor vorgenommen werden!

Drehwaage (Abbildung 7a)

Die kleinen Kugeln der Masse m sind auf einer möglichst leichten waagrecht montiert, die von einem senkrecht gespannten Torsionsdraht gehalten wird. Den Massen m stehen im Abstand r zwei sehr viel größere Massen M (Position 1) gegenüber. Es wirkt auf jede der Massen m die Gravitationskraft der großen Massen M . Dadurch kommt es zu einer Verdrehung des Torsionsdrahtes mit dem darauf angebrachten Spiegel.

Bringt man nun die großen Massen M in die Position 2, so kommt es zu einer Verdrehung des Torsionsdrahtes in der Gegenrichtung. Diese ‚Fallbewegung‘ der kleinen Massen im Gravitationsfeld der großen Massen wird über den Lichtzeiger sichtbar gemacht und dadurch auswertbar (unterer Teil der Abbildung 7).

Präzisionsmessungen der Gravitationskonstante ergeben den Wert:

$$f = 6,73 \pm 0,01 \cdot 10^{-11} \text{ [m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}\text{]}$$

so folgt aus dem Kräftegleichgewicht die Differentialgleichung dieser Bewegung:

$$m \frac{d^2 \bar{r}(t)}{dt^2} = -m \bar{g} - F_R = -m \bar{g} - R \bar{v}$$

(R ist der Reibungskoeffizient).

Die Reibungskraft F_R hängt außer von der Geschwindigkeit (v), und der Dichte der Luft (ρ) auch von der angeströmten Querschnittsfläche A , sowie der Form des Körpers ab. In der Praxis wird die meist schwierig zu berechnende Reibungskraft F_R durch einen empirischen Wert, den Widerstandsbeiwert c_w ersetzt.

Beschränkt man sich auf eine Dimension (Fall oder Wurf nach oben oder unten in z -Richtung) ergibt sich die folgende Differentialgleichung für die Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + R v = -m g$$

(In dieser Gleichung fällt im Gegensatz zum freien Fall die Masse m nicht weg!)

Es soll nun der Verlauf der Geschwindigkeit unter der Wirkung der Reibung berechnet werden. Man geht dabei von folgender Gleichung aus:

$$m \frac{dv(t)}{dt} + R v = -m g$$

Diese Gleichung ist eine **inhomogene Differentialgleichung** mit der dazugehörigen **homogenen Differentialgleichung**:

$$m \frac{dv(t)}{dt} + R v = 0$$

Man erhält die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung durch Addition einer partikulären Lösung zur Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Ein Ansatz zur Lösung der homogenen Differentialgleichung ist:

$$v(t) = A e^{\lambda t}$$

Einsetzen ergibt:

$$A e^{\lambda t} (m \lambda + R) = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{R}{m}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also:

$$v(t) = v_G + A e^{-\frac{R}{m} t}$$

mit v_G einer partikulären Lösung.

1.3.3.4 Bewegung im homogenen Schwerefeld

a) Fall und Wurf ohne Luftwiderstand

Eine besonders einfache Form der Bewegung erhält man dann, wenn die Kraft die auf einen Massenpunkt einwirkt **zeitlich konstant** ist, z.B. wenn sich der Körper frei im **homogenen Schwerefeld** bewegt.

Für die Kraft die auf einen Massenpunkt wirkt gilt dann:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Entsprechend dem 2. Newtonschen Gesetz ergibt sich für das dynamische Gleichgewicht (Trägheit = äußere Kraft):

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = m \vec{g}$$

Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung für deren Bewegungsgleichung oben gefunden wurde:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{g}}{2}(t - t_0)^2$$

Der zeitliche Verlauf der Bewegung des Massenpunktes ist **unabhängig von seiner Masse!** Nur die Anfangsbedingung und die Feldstärke bestimmen den Bewegungsablauf.

Ersetzt man $\vec{r}(t_0)$ und $v(t_0)$ durch \vec{r}_0 und \vec{v}_0 und setzt $t_0 = 0$ sowie $\vec{r}_0 = \vec{0}$, so erhält man eine einfachere Form der Bewegungsgleichung:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2} t^2$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 eines Körpers Null so spricht man vom **freien Fall** ist $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$ vom **Wurf** eines Körpers.

b) Fall und Wurf mit Luftwiderstand

Ist ein Körper von einem Medium (Luft) umgeben, so wirkt dieses in Form einer **Reibungskraft** F_R auf den Körper.

Experimentell findet man für Geschwindigkeiten von $0 < v \leq l$ [m s⁻¹] daß:

$$F_R \text{ prop. } v$$

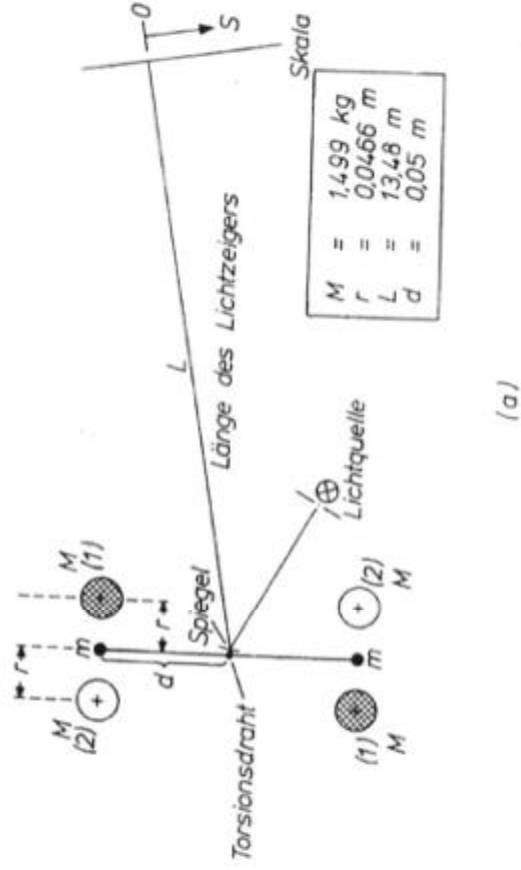
F_R hat die Dimension einer Kraft (Reibungskraft).

Geschwindigkeiten dieser Größe findet man bei der Pendelbewegung oder der Bewegung von Ladungen zwischen Kondensatorplatten.

Für höhere Geschwindigkeiten $l < v \leq 300$ [m s⁻¹] findet man dagegen:

$$F_R \text{ prop. } v^2$$

(Folgt aus der Bernoulli Gleichung, siehe später).



(a)

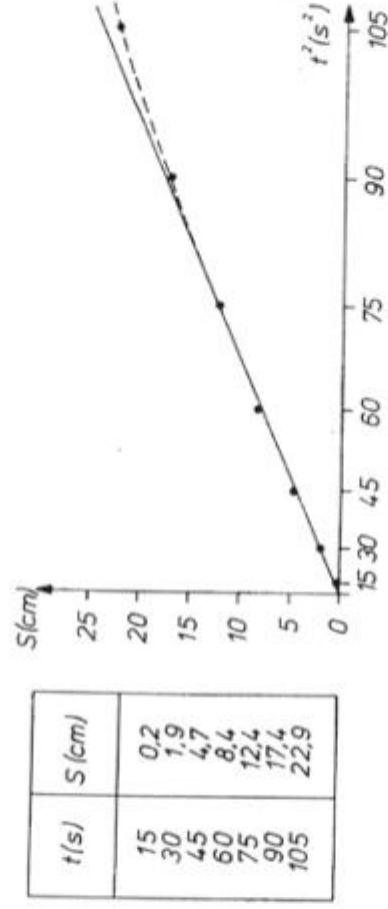


Abb.7. Funktionsweise und Auswertung der Meßdaten bei der Drehwaage. (a) Blick von oben auf die Drehwaage.

1.3.3.2 Gleichheit von träger und schwerer Masse

In den beiden empirisch von Newton gefundenen Gesetzen (Aktionsprinzip, 2. N. G.) und dem Gravitationsgesetz tritt die Masse als Parameter auf. (Um sie zu unterscheiden wurden sie mit m_T bzw. m_S bezeichnet). Die träge Masse m_T und schwere Masse m_S sind zueinander proportional. Dies ist ein Naturgesetz. Der Proportionalitätsfaktor hat einen von der chemischen Zusammensetzung des Körpers unabhängigen, universellen Wert: $m_T / m_S = 1 \pm 10^{-11}$. Innerhalb der klassischen Physik ist es nicht möglich die Gleichheit von träger und schweren Masse zu zeigen. Erst im Rahmen der relativistischen Erweiterung der klassischen Mechanik (Allgemeine Relativitätstheorie) wird dies gezeigt.

Eine partikuläre Lösung ergibt sich aus folgender Überlegung:
 Für eine bestimmte Geschwindigkeit v_G werden Schwerkraft und Reibungskraft gleich groß sein ($Rv_G = mg$) und heben einander daher auf. Der Körper bewegt sich ab diesem Zeitpunkt kräftefrei mit der konstanten Grenzgeschwindigkeit v_G .

Durch einsetzen der **Anfangsbedingung** $v(t=0) = v_0$ erhält man für die Integrationskonstanten A :

$$v_0 = v_G + A \rightarrow A = v_0 - v_G$$

und damit als Bewegungsgleichung:

$$v(t) = v_G + (v_0 - v_G) e^{-\frac{R}{m}t}$$

Für große Zeiten t nähert sich die Geschwindigkeit v des Körpers der Grenzgeschwindigkeit v_G , unabhängig davon ob die Anfangsgeschwindigkeit v_0 kleiner oder größer als v_G ist.

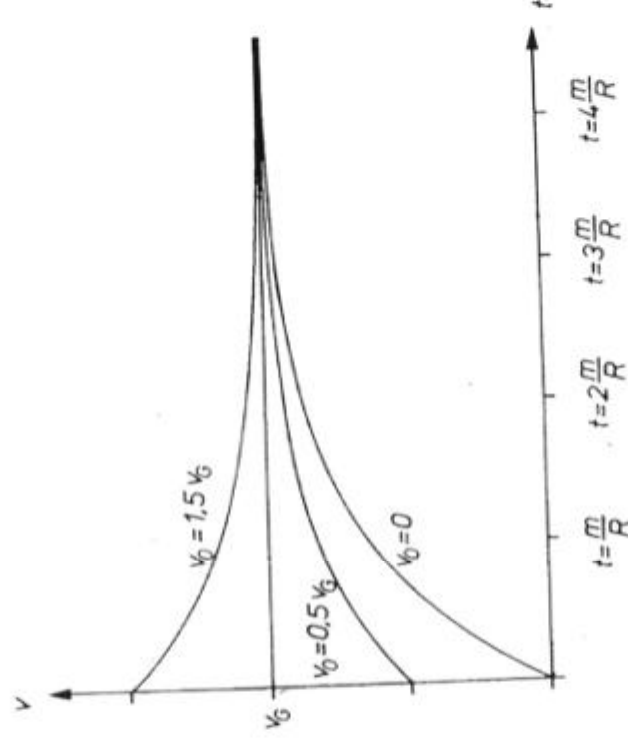


Abb. 8. Geschwindigkeit als Funktion der Zeit für einen unter dem Einfluß von Erdanziehung und Reibung fallenden Körper.

1.3.4 Impuls

Wirkt während einer bestimmten Zeit t eine Kraft auf einen Körper, so ändert sich der Bewegungszustand. Das Produkt der beiden physikalischen Größen (Kraft mal Zeit) nennt man **Impuls** (gelegentlich auch Kraftstoß).

Der Impuls \vec{p} ist wie die Kraft eine Vektorgroße.
 Einheit: [N s] oder [kg m s⁻¹]

Wenn man jedem Punkt des Raumes einen bestimmten Wert einer physikalischen Größe zuordnen kann (z.B. eine Kraft) so ist durch diese Zuordnung ein **Feld** der betreffenden Größe (z.B. ein Kraftfeld) definiert. Unter der **Feldstärke** versteht man das Feld in einem Raumpunkt bezogen auf die Einheit (siehe unten).

1.3.2.1 Gravitationsfeld

Newton'sches Gravitationsgesetz

Auf der Erde sind alle materiellen Körper einer "Erdanziehungskraft", die zum Erdmittelpunkt gerichtet ist, unterworfen. Ausgehend von den Keplerschen Gesetzen (siehe unten) formulierte Newton (1665) sein nach ihm benanntes Gravitationsgesetz in der allgemeinen Form so:

Jeder mit Masse behaftete Körper erzeugt im umgebenden Raum ein Gravitationsfeld dessen Richtung und Größe durch das **Gravitationsgesetz** gegeben ist,

$$\vec{F} = m_s f \frac{M}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Dabei ist M die felderzeugende Masse, m_s die Probemasse (durch sie manifestiert sich das Feld überhaupt!), r der Abstand der beiden Massen, f die **Gravitationskonstante** und $\left\{ \frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|} \right\}$ der Einheitsvektor in Richtung der Verbindungslinie der beiden Massen.

Die **Gravitationsfeldstärke** (Kraft auf die Masseneinheit) ist gegeben durch:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m_s} = f \frac{M}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Diese ‚**Schwerkraft**‘ hängt wie die Trägheit von der Masse des Körpers ab. Man spricht in diesem Fall von der **schweren Masse** (m_s).

Gravitationsfeld der Erde

Ist die felderzeugende Masse die Erdmasse ($M=M_E$), und ($r=R_E$) der Abstand eines Punktes auf der Erdoberfläche vom Erdmittelpunkt, dann ist die Erdanziehungskraft G (Schwerkraft) ihrem Betrag nach gegeben durch:

$$G = m_s f \frac{M_E}{R_E^2} = m_s g \rightarrow g = f \frac{M_E}{R_E^2}$$

Die Größe g ist ihrem Betrag nach gleich der Feldstärke des Erdschwerefeldes, man spricht auch von der Erdbeschleunigung. Ihr Wert ist im Mittel auf der Erdoberfläche $g = 9.81[\text{m s}^{-2}]$. Das Feld $m\vec{g}$ wird als das **homogene Schwerefeld** bezeichnet, wobei angenommen wird daß $|\vec{g}|$ konstant ist, und die \vec{g} - **Vektoren** parallel sind und in Richtung zum Erdmittelpunkt zeigen (der als unendlich weit entfernt gedacht wird).

1.3.6 Arbeit

Definition der Arbeit

Wirkt eine konstante Kraft \vec{F} auf einen Körper, der sich entlang des geradlinigen Wegstückes \vec{s} bewegt, so bezeichnet man das skalare Vektorprodukt aus Kraft und Weg

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

als die **Arbeit** W die die Kraft an dem Körper verrichtet.
Einheit: [Joule] = [N m]

Für den Fall einer ortsabhängigen Kraft

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

oder wenn der Weg nicht geradlinig ist, ist die Arbeit durch das **Wegintegral**

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

gegeben (C ist dabei die Bahnkurve entlang der die Kraft wirkt).

Dieses Integral wird berechnet, indem man eine Parameterdarstellung für die Bahnkurve wählt.
 $\vec{r} = \vec{r}(s)$

Für das Wegintegral ergibt sich dann:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} [\vec{F}[\vec{r}(s)] \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}] ds$$

wobei s_1 und s_2 die Parameterwerte der Orte \vec{r}_1 und \vec{r}_2 sind, die den Anfangs- bzw. Endpunkt des Weges C markieren.

1.3.6.1 Berechnung der Arbeit in einem gegebenen Kraftfeld

Gegeben ist ein Kraftfeld in kartesischen Koordinaten der Form:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ \frac{1}{z+1} \end{pmatrix} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y + \frac{1}{z+1}\vec{e}_z$$

Es soll die Arbeit berechnet werden um einen Massenpunkt in diesem Kraftfeld längs einer **Schraubelinie** von $P_1(a,0,0)$ nach $P_2(a,0,2\pi c)$ zu bringen ($c = 0,1,2,3,\dots$ ganze Zahl).

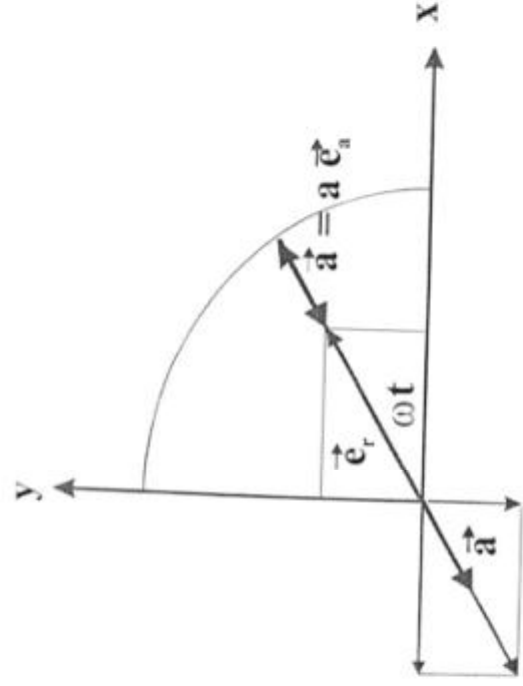


Abb.6. Darstellung des Beschleunigungsvektors bei der Kreisbewegung im ortsfesten (x,y) - Koordinatensystem.

Der Betrag von \vec{a} ergibt sich wieder durch die Bildung des skalaren Vektorproduktes. Da die Länge des Einheitsvektors $|\vec{e}_r| = 1$ ist, kann der Betrag der Winkelbeschleunigung auf folgenden Art berechnet werden:

$$|\vec{a}| = a = r\omega^2 \left(\underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_1 \right) = r\omega^2$$

$$a = r\omega^2$$

Mathematisch bedeutet das, daß:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2)$$

wegunabhängig ist.

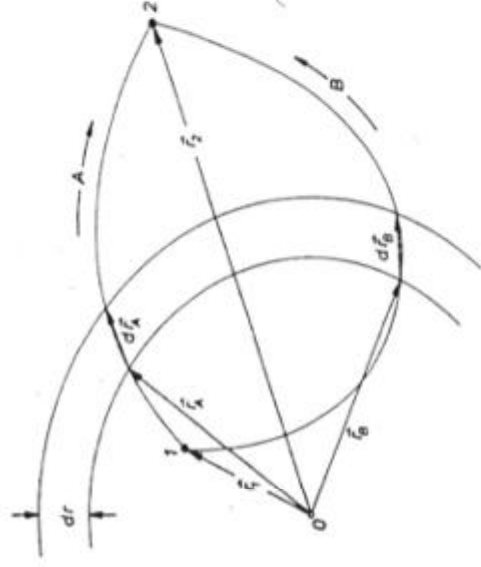


Abb.8. Um eine Masse vom Raumpunkt \vec{r}_1 in den Raumpunkt \vec{r}_2 zu bringen, ist die dafür nötige Arbeit unabhängig davon ob man den Weg ,A' oder den Weg ,B' wählt.

Alle Kraftfelder der Form:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

sind konservativ und insbesondere jene Felder die proportional zu Potenzen von r sind. Auch das Newtonsche Gravitationsfeld ist konservativ. Um das zu beweisen, muß man zeigen, daß die Arbeit

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -f m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{r}$$

wegunabhängig ist.

Wegen

$$\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = dr$$

vereinfacht sich das Integral zu

$$W = -f m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -f m_1 m_2 \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = f m_1 m_2 \left\{ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right\}$$

Daraus folgt, daß das Gravitationsfeld konservativ ist, da das Wegintegral unabhängig vom gewählten Weg ist, sondern nur von r_1 und r_2 abhängt. Auch das homogene Schwerfeld ist ein konservatives Feld!

1.2.3.3 Gleichförmige Kreisbewegung

Eine besonders wichtige Form der Bewegung stellt die Kreisbewegung dar, daher soll im folgenden dieser Bewegungsablauf genauer betrachtet werden.

Darstellung der Kreisbewegung in Polarkoordinaten:

$$\vec{r}(t) = |\vec{r}| \vec{e}_r$$

Bedingungen für die **Kreisbewegung** ist $|\vec{r}| = \text{konst.}$!

Bedingungen für die **gleichförmige Kreisbewegung** ist eine konstante Winkelgeschwindigkeit, $\omega = \text{konst.}$ (wobei $\omega = \varphi / t$!)

φ ist der Winkel zwischen dem Ortsvektor \vec{r} , bzw. dem Einheitsvektor \vec{e}_r und der $x -$ Achse eines raumfesten Koordinatensystems. Die Winkelgeschwindigkeit ω wird in rad s^{-1} gemessen (1 rad = 1 Radiant = 1 Bogeneinheit entspricht $57.29578^\circ = 360^\circ / 2\pi$).

Komponentendarstellung des Einheitsvektors \vec{e}_r im ortsfesten (x,y) - Koordinatensystem:

$$\vec{e}_r = \cos \omega t \cdot \vec{e}_x + \sin \omega t \cdot \vec{e}_y$$

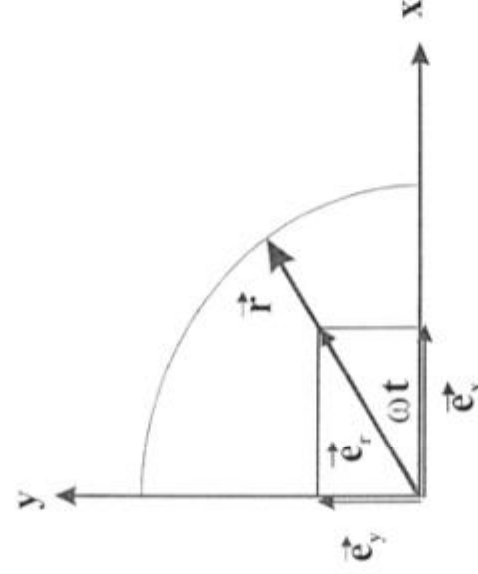


Abb.4. Darstellung des Radiusvektor der Kreisbewegung im ortsfesten (x,y) - Koordinatensystem.

Geschwindigkeit bei der Kreisbewegung

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \\ &= r \left\{ \frac{d}{dt} (\cos \omega t \cdot \vec{e}_x + \sin \omega t \cdot \vec{e}_y) \right\} = \\ &= r\omega \left\{ -\sin \omega t \cdot \vec{e}_x + \cos \omega t \cdot \vec{e}_y \right\} \end{aligned}$$

Dadurch ist Richtung und Betrag der Geschwindigkeit \vec{v} bei der Kreisbewegung gegeben (siehe Abbildung 5).

fest, d.h. man setzt das Potential im Unendlichen gleich Null, dann erhält man die einfache Form für das Potential des Gravitationsfeldes

$$V(r) = -f \frac{m_1 m_2}{r}$$

1.3.9 Potentielle und kinetische Energie eines Massenpunktes

a) Potentielle Energie

Befindet sich ein Massenpunkt (z.B. m_1) an einem festen Ort \vec{r} eines Potentialfeldes, welches von einer Masse m_2 erzeugt wird, so besitzt m_1 die **potentielle Energie**

$$E_{pot}(\vec{r}) = V(\vec{r})$$

Dabei ist E_{pot} eine Eigenschaft des Massenpunktes m_1 am Ort \vec{r} und $V(\vec{r})$ eine Eigenschaft des Raumes der durch die Masse m_2 verändert wird. (Die umgekehrte Aussage gilt in Bezug auf die Masse m_2).

Das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ leistet Arbeit an einem Massenpunkt entlang eines Weges ($\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$) im Potentialfeld, wenn sich die potentielle Energie dabei verringert. Soll die potentielle Energie erhöht werden, muß von außen Arbeit gegen das Kraftfeld verrichtet werden (W ist dann negativ).

b) Kinetische Energie

Die Arbeit dW die von einer Kraft \vec{F} entlang eines Wegstückes $d\vec{r}$, während der Zeit dt geleistet wird ist gegeben durch:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \underbrace{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}}_{2.N.G.} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{mv^2}{2} \right\} \equiv \frac{d}{dt} \{ E_{kin} \}$$

Für die geleistete Arbeit im Intervall $t_1 \rightarrow t_2$ gilt dann:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt} dt = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(v^2)}{dt} dt = \frac{1}{2} m \int_{v^2(t_1)}^{v^2(t_2)} d(v^2) = \frac{1}{2} m \{ v^2(t_2) - v^2(t_1) \} \rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Definition:

Ein Körper mit der Masse m und der Geschwindigkeit v hat die **kinetische Energie**:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

Durch diese Gleichung läßt sich der Ort eines Massenpunktes zu jedem beliebigen Zeitpunkt vorausberechnen, allerdings unter der Voraussetzung daß:

- i) der Ort \vec{r} zum Zeitpunkt t_0 und die Geschwindigkeit \vec{v} zum Zeitpunkt t_0 bekannt sind, **und**
- ii) der zeitliche Verlauf der Beschleunigung $\vec{a}(t)$ im Zeitintervall t_0 und t gegeben ist.

1.2.3 1 Gleichförmig geradlinige Bewegung (unbeschleunigte Bewegung)

Es gilt:

$$\vec{a}(t) = \vec{0}, \quad (= \text{Nullvektor}) \quad \vec{v}(t) = \text{const.} = \vec{v}_0$$

dann folgt aus der allgemeinen Bewegungsgleichung:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t'=t_0}^{t'=t} \vec{v}_0 dt'$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0(t - t_0)$$

Die Bewegung des Massenpunktes erfolgt geradlinig in Richtung von \vec{v}_0 und gleichförmig, d.h. in gleichen Zeitintervallen $\Delta t = t - t_0$ werden gleiche Strecken $|\Delta \vec{r}|$ zurückgelegt.

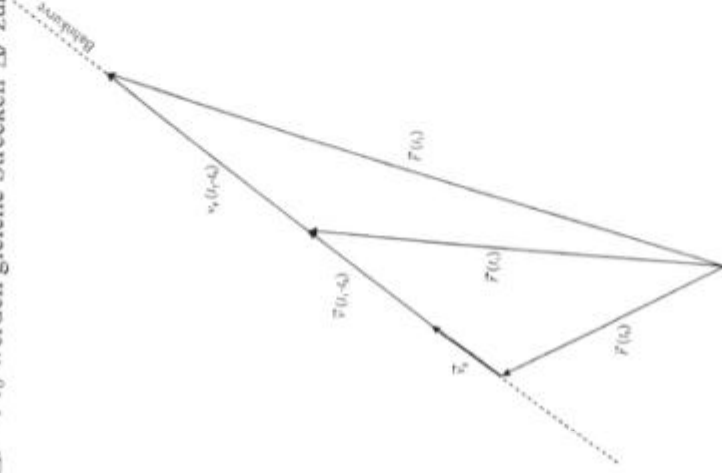


Abb.2. Geradlinige gleichförmige Bewegung. Der Massenpunkt bewegt sich auf einer Geraden, die in Richtung \vec{v}_0 durch den Punkt $\vec{r}(t_0)$ läuft. Die Bewegung erfolgt gleichförmig, d.h. in gleichen Zeitintervallen Δt werden gleiche Strecken $|\Delta \vec{r}|$ zurückgelegt

1.3.10 Erhaltungssätze

1.3.10.1 Allgemeines über Erhaltungssätze

Die allgemeinen Bewegungsvorgänge in einem mechanischen System werden durch das 2. Newtonsche Gesetz $\vec{F} = m\vec{a}$ bestimmt. \vec{F} ist dabei die von außen auf den Massenpunkt wirkende Kraft. Bei bekannten Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = t_0$, kann daher die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Körper mit der Masse m berechnet werden.

In diesem Sinne sind die physikalischen Erhaltungssätze überflüssig. Ihre große Nützlichkeit zeigt sich aber in folgenden Punkte:

- Erhaltungssätze sind unabhängig von mitunter komplizierten Einzelheiten, die in physikalischen Systemen zwischen den Beobachtungszeitpunkten vor sich gehen.
- Erhaltungssätze sind sehr eng mit physikalischen Invarianzen (z.B. Invarianz der Newtonschen Gesetze in Inertialsysteme) verbunden.

1.3.10.2 Energieerhaltungssatz

Es wurde gezeigt daß:

$$W(\vec{r}) = -\{V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)\}$$

gilt, d.h. die Arbeit ist bis auf das Vorzeichen und eine additive Konstante, $V(\vec{r}_0)$, gleich dem Potential. Außerdem definieren wir die potentielle Energie eines Körpers, der sich am Ort r befindet als:

$$E_{pot}(\vec{r}) = V(\vec{r}).$$

Für die Bewegung um ein infinitesimales Wegstück $d\vec{r}$ in der Zeit dt , gilt in konservativen Kraftfeldern:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{d\{V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)\}}{dt} = -\frac{dV(\vec{r})}{dt} = -\frac{dE_{pot}(\vec{r})}{dt}$$

Für die kinetische Energie ergab sich aus dem 2. Newtonschen Gesetz:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \underbrace{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}_{2.N.G.} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m v^2}{2} \right\} \equiv \frac{dE_{kin}}{dt}$$

Daraus folgt:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dE_{pot}}{dt} = \frac{dE_{kin}}{dt} \Rightarrow \frac{d\{E_{kin} + E_{pot}\}}{dt} = 0$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man schließlich den **Energieerhaltungssatz**:

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{ges} = konst.$$

1.2 KINEMATIK

Die Kinematik beschreibt Bewegungsabläufe ohne nach deren Ursache zu fragen.

Wird ein Raum durch ein (z.B. kartesisches) Koordinatensystem aufgespannt, erfolgt die Beschreibung der Position eines Punktes P in diesem Raum durch einen Vektor \vec{r} . Verändert der Punkt P seine Position zeitlich, dann beschreibt $\vec{r}(t)$ die **Bahnkurve** des Punktes in diesem Raum.

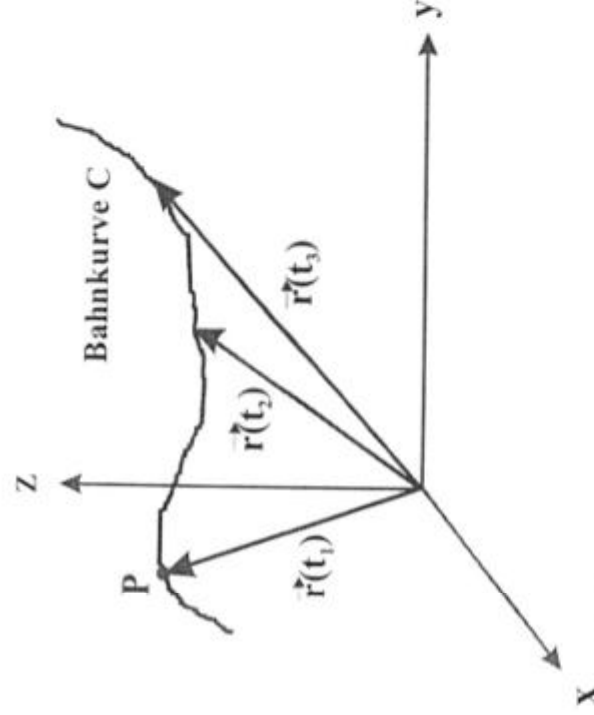


Abb. 1. Beschreibung eines Punktes P im Raum durch einen Ortsvektor \vec{r} .

Ist die Funktion $\vec{r}(t)$ gegeben, ist dadurch die Bahnkurve C, d.h. der weitere Bewegungsablauf des Punktes P im Raum bestimmt. Die Vektoren $\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2), \dots$, beschreiben die Positionen des Punktes zu den Zeiten t_1, t_2, \dots .

1.2.1 Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist eine vom Ort und der Zeit abgeleitete Vektorgröße

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Die **Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung des Ortsvektors** und ist selbst wieder ein Vektor. Einheit: $[\text{m s}^{-1}]$.

1.2.2 Beschleunigung

Ändert sich bei der Bewegung eines Punktes entweder der Betrag oder die Richtung der Geschwindigkeit oder beides, so spricht man von beschleunigter Bewegung.

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E_{ges}}{m} - \frac{D}{m}x^2}$$

Aus rechenstechnischen Gründen ist es vorteilhafter vorerst die Funktion $t = t(x)$ zu berechnen

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{2E_{ges}}{m} - \frac{D}{m}x^2}} dx$$

Durch Integration und Berücksichtigen der Randbedingung: $t(x_0) = 0$, für $x_0 = 0$ erhält man:

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2E_{ges}}{m} - \frac{D}{m}x'^2}} = \sqrt{\frac{m}{2E_{ges}}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - \frac{D}{2E_{ges}}x'^2}}$$

Dieses Integral kann durch Variablensubstitution auf eine einfache Form zurückgeführt werden. Erste Variablensubstitution:

$$w = \sqrt{\frac{D}{2E_{ges}}} x' \quad \text{bzw.} \quad dw = \sqrt{\frac{D}{2E_{ges}}} dx'$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{D}} \int_0^{\sqrt{\frac{D}{2E_{ges}}x}} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$$

Zweite Variablensubstitution:

$$w = \sin u \quad \text{bzw.} \quad dw = \cos u du \quad u = \arcsin w$$

ist

$$t = \sqrt{\frac{m}{D}} \int_0^{\arcsin\left(\sqrt{\frac{D}{2E_{ges}}}x\right)} du = \sqrt{\frac{m}{D}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{D}{2E_{ges}}}x\right)$$

daraus erhält man die gesuchte Bewegungsgleichung: $x = x(t)$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_{ges}}{D}} \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t\right)$$

- 3.4.1 Äußere Kräfte
- 3.4.2 Trägheitskräfte (Zentrifugalkraft)
- 3.5 Kinetische Energie und Trägheitsmoment eines rotierenden starren Körpers
- 3.6 Drehimpuls eines starren Körpers

4. Festkörper, Flüssigkeiten und Gase

- 4.1 Atomare Modelle der Aggregatzustände
 - 4.1.1 Elastisch und plastisch deformierbare Festkörper
 - 4.1.2 Hookesches Gesetz
 - 4.2 Ruhende Flüssigkeiten, Hydrostatik
 - 4.2.1 Statischer Druck in Flüssigkeiten
 - 4.2.2 Auftrieb in einer Flüssigkeit (Archimedisches Prinzip)
 - 4.3 Strömende Flüssigkeiten
 - 4.3.1 Kontinuitätsgleichung
 - 4.3.2 Bernoulli Gleichung
 - 4.3.3 Laminare Strömung durch Röhren (Gesetz von Hagen - Poiseuille)
 - 4.4 Gase
 - 4.4.1 Boyle-Mariottesches Gesetz
 - 4.4.2 Luftdruck und barometrische Höhenformel

5. Schwingungen und Wellen

- 5.1 Ungedämpfter harmonischer Oszillator
 - 5.1.1 Überlagerung von Schwingungen
 - 5.1.2 Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Richtung und gleicher Frequenz mit verschiedener Amplitude und Phase
 - 5.1.3 Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Richtung und Amplitude mit verschiedener Frequenz (Schwebung)
 - 5.1.4 Überlagerung zweier senkrechter Schwingungen (Lissajous Figuren)
- 5.2 Gedämpfter harmonischer Oszillator
- 5.3 Getriebener gedämpfter Oszillator (erzwungene Schwingung)
- 5.4 Gekoppelte Oszillatoren
- 5.4.1 Gekoppelte Federpendel
- 5.5 Mechanische Wellen
 - 5.5.1 Verallgemeinerung des Wellenbegriffes
 - 5.5.1.1 Ebene Wellen in z - Richtung
 - 5.5.1.2 Ebene Wellen mit beliebiger Ausbreitungsrichtung
 - 5.5.1.3 Allgemeine Wellenformen
 - 5.5.1.4 Kugelwellen
 - 5.5.1.5 Stehende Wellen, Eigenschwingungen
 - 5.5.2 Differentialgleichung einer Welle

6. Physikalische Gesetze in zueinander bewegten Koordinatensystemen

- 6.1 Galilei – Transformation
- 6.2 Spezielle Relativitätstheorie (Lorentz- Transformation)
 - 6.2.1 Relativistische Änderung eines Zeitintervalls
 - 6.2.2 Relativistische Änderung der Länge eines Stabes

2. Mechanik von Massenpunktsystemen

Bisher wurde nur die Bewegung eines einzigen Teilchens (Massenpunkt) betrachtet und dessen Bahn unter dem Einfluß äußerer Kräfte berechnet. Im folgenden sollen nun Systeme, bestehende aus mehreren Teilchen, beschrieben werden, wo neben den äußeren Kräften, (die auf das ganze System wirken) auch die inneren Wechselwirkungen zwischen den Teilchen des Systems eine Rolle spielen (da sonst nicht von einem Massenpunktsystem gesprochen werden kann). Zuerst sollen einigen Grundbegriffe für die Beschreibung von Mehrteilchensystemen geklärt werden.

2.1 Massenschwerpunkt

Gegeben seien N Massenpunkte, deren Lage durch die Ortsvektoren \vec{r}_i beschrieben werden. Man definiert als den **Massenschwerpunkt** S des ganzen Systems den Punkt mit dem Ortsvektor

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

(M ist die Gesamtmasse des Systems).

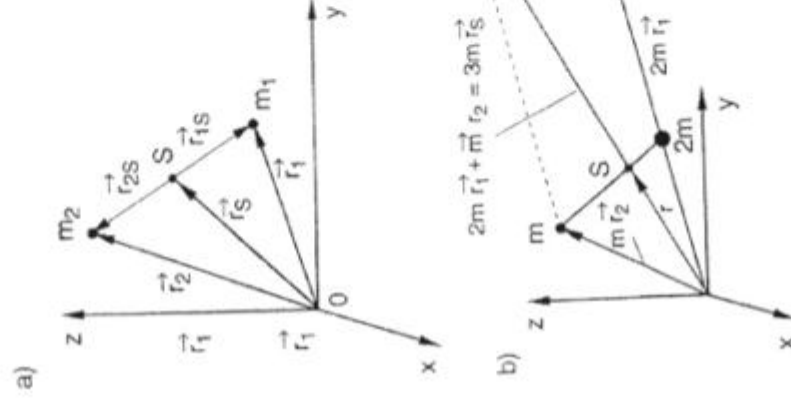


Abb.10 Zur Definition und Ermittlung des Schwerpunktes, (a) schematische Darstellung, (b) Graphische Ermittlung der Schwerpunktskoordinaten am Beispiel $m_1 = 2m_2$

MT 136.038

2

2.5 Drehmoment

Gegeben ist ein System von zwei Massenpunkten m_1 und m_2 . Außer der gegenseitigen Wechselwirkung

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

möge auf m_1 die äußere Kraft \vec{F}_1 und auf m_2 die Kraft \vec{F}_2 einwirken.

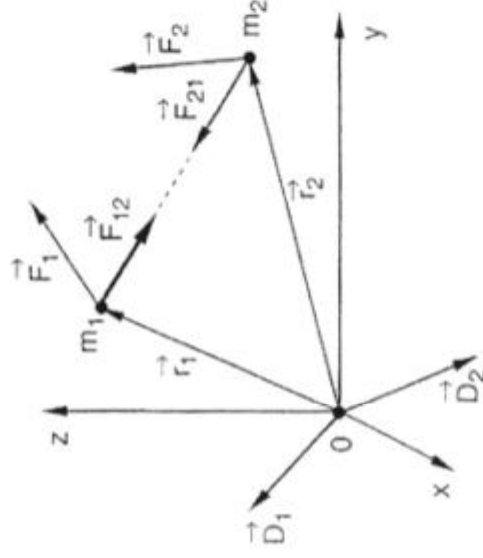


Abb.11 Drehmoment in einem System bestehende aus zwei Massen unter der Einwirkung der äußerer Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 .

Das Drehmoment der beiden Teilchen, bezogen auf den Nullpunkt 0 des Koordinatensystems, ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} \vec{D}_1 &= \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) \\ \vec{D}_2 &= \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) \end{aligned}$$

Für das gesamte Drehmoment des Systems folgt dann:

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + (\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}) \rightarrow$$

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}}_0$$

Der letzte Summand in diesem Ausdruck verschwindet da

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \parallel \vec{F}_{12} (= -\vec{F}_{21})$$

3. Mechanik des starren Körpers

Bisher wurde die Dynamik einer Punktmasse, sowie die eines Ensembles von isolierten Punktmassen behandelt. Es wurde die Bewegung unter dem Einfluß von Kräften untersucht und dabei außer den Newtonschen Gesetzen fundamentale Erhaltungssätze für Energie, Impuls angewendet.

Alle Phänomene die mit der räumlichen Gestalt eines Körpers zusammenhängen, erfordern zu ihrer Erklärung und Beschreibung eine Erweiterung der bisher verwendeten Modelle. Neben der bisher behandelten Translation einzelner Massenpunkte soll jetzt zusätzlich berücksichtigt werden, daß ausgedehnte Körper auch um einen Punkt oder um freie Achsen rotieren können

3.1 Modell des starren Körpers

Einen räumlich starrer Körper mit der Gesamtmasse M und dem Volumen V kann man sich als ein aus vielen (N) kleinen Volumeneinheiten ΔV_i , mit den Massen Δm_i bestehend vorstellen, wobei diese ΔV_i **starr miteinander verbunden sein sollen** (daher der Begriff starrer Körper).

Das **Gesamtvolumen** V und die **Gesamtmasse** M sind gegeben durch:

$$V = \sum_{i=1}^N \Delta V_i, \quad M = \sum_{i=1}^N \Delta m_i.$$

Den Quotienten

$$\rho = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$$

nennt man die **Massendichte** des Volumenelements ΔV_i .
Einheit: $[\text{kg m}^{-3}]$

Die Gesamtmasse M läßt sich dann schreiben als

$$M = \sum_{i=1}^N \rho_i \Delta V_i$$

Für $\Delta V_i \rightarrow 0$ geht die Summe in ein **Volumenintegral** über:

$$V = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \Delta V_i = \int_V dV$$

(wobei das Volumenintegral eine Abkürzung für ein dreifaches Integral ist).
Daraus folgt für die Gesamtmasse:

$$M = \int_V \rho dV$$

Die Dichte $\rho(\vec{r})$ wird im allgemeinen ortsabhängig sein.

Bei **homogenen** Körpern ist $\rho(\vec{r})$ über das ganze Volumen konstant.

Teilchen in einem bestimmten Augenblick in der gleichen Hälfte des Volumens aufhalten 10^{-15} . Aber auch ein Ensemble von 50 Teilchen bildet bei weitem noch keine makroskopische Substanzmenge.

Die Wahrscheinlichkeit für 1 Mol einer Gasmenge ist so unvorstellbar klein, daß man sie wirklich als Null ansehen kann. Mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit eines Prozesses, bei dem die Entropie des Universums abnimmt, ist Null.

3.19 Der dritte Hauptsatz

Je niedriger die Temperatur T_K des kälteren Reservoirs ist, desto niedriger ist die nach dem Carnot-Prinzip maximal mögliche Leistungszahl. Befindet sich das wärmere Reservoir bei 1 K und das kältere bei 10^{-3} K, so müssen 10^3 J aufgewandt werden, um dem kälteren Reservoir 1 J Wärme zu entziehen. Die Leistungszahl geht in jedem Fall gegen 0, wenn T_K gegen 0 K geht. Deshalb müßte man unendlich viel Arbeit aufbringen, um die Temperatur auf 0 K abzusenken. Anders ausgedrückt: Mit endlich vielen Schritten kann der absolute Nullpunkt niemals erreicht werden.

Dieses Prinzip nennt man den **dritten Hauptsatz der Thermodynamik**:

Es ist unmöglich, durch irgendeine Prozedur und sei sie noch so idealisiert, die Temperatur irgendeines Systems durch eine endliche Anzahl von Schritten auf den absoluten Nullpunkt zu senken.

Dies hängt damit zusammen, daß die Entropieänderung und die spezifischen Wärmen der Substanzen bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt gegen Null gehen. Daraus folgt das *Nernstsche Wärmetheorem*, eine andere Formulierung des dritten Hauptsatzes:

Am absoluten Nullpunkt der Temperatur ist die Entropie völlig geordneter Kristalle gleich Null. Wenn man die Entropie in reinem, kristallinem Zustand bei $T = 0$ K gleich Null setzt, dann hat jede Verbindung von Elementen (also jede Substanz) eine positive Entropie.

3.2.1 Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel:

Abbildung 12 zeigt die Position der Halbkugel in Bezug auf das gewählte Koordinatensystem. Durch diese Wahl der Lage der Halbkugel ($x = y = z = 0$), folgt aus Symmetriegründen $x_s = y_s = 0$.

Bei homogener Dichte ρ erhält man für z_s :

$$z_s = \frac{1}{M_V} \int z \rho dV = \frac{1}{V} \int z dV .$$

Bei dieser Problemstellung ist es zweckmäßig auf Kugelkoordinaten überzugehen, da sich dadurch besonders einfache Integrationsgrenzen ergeben.

Mit $z = r \cos \vartheta$ und $dV = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ erhält man:

$$z_s = \frac{1}{V} \int_{r=0}^R \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3 \cos \vartheta \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{3}{8} R$$

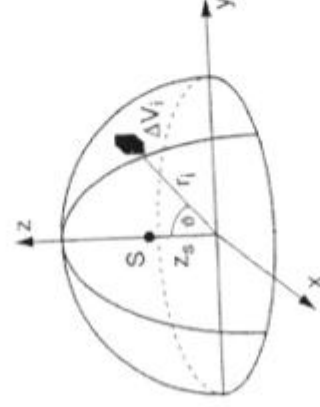


Abb.12 Schwerpunkt einer Halbkugel

3.3 Bewegung eines starren Körpers

Die Mittelpunkt P_i der Volumenelemente $d\vec{V}_i$ seien durch ihre Ortsvektoren \vec{r}_i beschrieben, der Schwerpunkt S durch \vec{r}_s . Der Vektor

$$\vec{r}_{is} = \vec{r}_i - \vec{r}_s$$

zeigt dann vom Schwerpunkt S zum Punkt P_i

Das Gas verrichtet bei der Expansion die Arbeit W und nimmt die Wärmemenge $|Q| = |-W|$ aus dem Reservoir mit der Temperatur T auf:

$$|Q| = |-W| = \int_1^2 p dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Damit ist die Entropieänderung des Gases (des Systems) $\Delta S = +|Q|/T$. Entsprechend ist die Entropieänderung des Reservoirs $\Delta S = -|Q|/T$. Die gesamte Änderung von System und Reservoir ist Null.

Das ist ein wichtiges, allgemeingültiges Resultat:

Bei einem reversiblen Prozeß ist die Entropieänderung des Universums gleich Null. Unter „Universum“ versteht man die Gesamtheit von System und Umgebung.

Bei der spontanen (freien) Expansion eines idealen Gases handelt es sich um einen irreversiblen Prozeß. Daher kann man die Entropieänderung des Gases nicht durch Integration von dQ/T berechnen. Aber sein Anfangs- und Endzustand ist gleich, wie bei der eben behandelten isothermen Expansion. Weil die Entropie eine Zustandsfunktion ist, ist die Änderung zwischen denselben Zuständen gleich. Es gilt wie oben

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Das Gas ist von der Umgebung isoliert, es kann weder Materie noch Energie ausgetauscht werden. Somit ist die Entropieänderung des Gases gleich der des Universums. Da $V_2 > V_1$, ist die Entropieänderung außerdem positiv. Auch dies ist ein allgemeingültiges Prinzip:

Bei einem irreversiblen Prozeß nimmt die Entropie des Universums zu.

Wäre bei der freien Expansion das Endvolumen kleiner als das Anfangsvolumen, so würde die Entropie abnehmen, was aber nicht beobachtet wird:

Es gibt keinen Prozeß, durch den die Entropie des Universums abnimmt.

Dieser Satz ist äquivalent zu den beiden Formulierungen des zweiten Hauptsatzes, vom Anfang dieses Kapitels.

Schließlich findet man:

Durch jeden irreversiblen Prozeß wird eine bestimmte Energie entwertet, steht also nicht mehr zum Verrichten von Arbeit zur Verfügung. Diese Energie ist gleich dem Produkt aus der Entropieänderung des Universums und der absoluten Temperatur des kältesten vorhandenen Reservoirs.

$$W = T\Delta S$$

Als Beispiel diene der inelastische Stoß eines Körpers, der aus der Höhe h auf den Boden fällt. Der Zustand des Systems ändert sich, da die potentielle Energie des Körpers abnimmt und seine innere Energie um die gleich große Wärmemenge zunimmt. Nach dem Stoß ist die potentielle Energie nicht mehr als Arbeit verfügbar, denn sie liegt nun als ungeordnete Teilchenbewegung vor.

Die Bewegung des Punktes P_i relativ zum Nullpunkt des Koordinatensystems ist dann gegeben durch

$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{is})$$

d.h., diese Bewegung läßt sich als Überlagerung der Translationsgeschwindigkeit \vec{v}_s des Schwerpunktes und einer Rotation $(\vec{\omega} \times \vec{r}_{is})$ um den Schwerpunkt beschreiben.

Die Rotationsachse ω braucht dabei allerdings nicht raumfest zu sein, sondern kann ihre Richtung im Laufe der Zeit ändern, wenn äußere Kräfte auf den Körper wirken (Kreiselproblem).

Die Gleichung für \vec{v}_i basiert auf der Annahme, daß $|\vec{r}_{is}| = \text{const}$ ist. Sie gilt also nicht mehr, wenn der Körper deformiert wird. Dann können zusätzliche Bewegungen (z.B. Schwingungen von P_i gegen S) auftreten. Ist der Körper völlig frei beweglich, so braucht man zur vollständigen Beschreibung seiner Bewegung sechs Koordinatenangaben: 3 Ortskoordinaten und 3 Winkelkoordinaten.

3.4 Kräfte und Kräftepaare

3.4.1 Äußere Kräfte

Während für einen Massenpunkt die an ihm angreifende Kraft \vec{F} eindeutig durch Größe und Richtung definiert ist, muß bei Kräften die an einem ausgedehnten Körper angreifen, zusätzlich noch der Angriffspunkt P dieser Kraft angegeben werden.

Eine nicht im Schwerpunkt S angreifende Kraft \vec{F} bewirkt ein Drehmoment, bezogen auf den Schwerpunkt S , und eine Beschleunigung des Schwerpunktes.

Ein ursprünglich ruhender Körper erfährt also durch diese Kraft eine Translation des Schwerpunktes S und eine Rotation um S .

3.4.2 Trägheitskräfte (Zentrifugalkräfte)

Bei der Rotation eines starren Körpers treten Beschleunigungskräfte auf. Jedes Massenelement Δm_i aus dem starre Körper besteht, erfährt bei der Rotation eine Beschleunigung zum Ursprung (siehe 1.2.3.3). Inertomare Kräfte sorgen dafür, daß (falls bestimmte Grenzen nicht überschritten werden) die Massenelemente sich gegenseitig nicht verschieben. Die aus dem 2. Newtonschen Gesetz sich ergebende Zentrifugalkraft ist ihrer Größe nach gegeben durch:

$$F_z = \Delta m_i r_i \omega^2$$

3.5 Kinetische Energie und Trägheitsmoment eines rotierenden starren Körpers

Wir betrachten einen ausgedehnten Körper, der sich um eine feste Achse dreht. Das Massenelement Δm_i habe den senkrechten Abstand $r_{ia} = |\vec{r}_i|$ von der Drehachse und die

Gleiches gilt für die Kompression von V_4 auf V_1

$$T_K V_4^{\gamma-1} = T_W V_1^{\gamma-1}$$

also:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$$

und schließlich

$$\frac{|(Q_K)_{rev}|}{|(Q_W)_{rev}|} = \frac{T_K}{T_W}$$

Daher ist mit den hier umgesetzten Wärmemengen der Wirkungsgrad gleich dem Carnot-Wirkungsgrad

$$\varepsilon_C = 1 - \frac{|(Q_K)_{rev}|}{|(Q_W)_{rev}|} = 1 - \frac{T_K}{T_W}$$

Dies gilt für alle zwischen zwei Reservoirs mit verschiedenen Temperaturen vollkommen reversibel arbeitenden Wärmekraftmaschinen. Außerdem ist der Carnot-Wirkungsgrad nach dem zweiten Hauptsatz der maximale Wirkungsgrad, den Wärmekraftmaschinen, die zwischen den Temperaturen T_K und T_W arbeiten, erreichen können.

3.18 Entropie und Ordnung

Wie gezeigt wurde, hängt der zweite Hauptsatz mit dem Phänomen zusammen, daß bestimmte Prozesse irreversibel sind, also nur in einer Richtung ablaufen. Jedoch lassen sich viele irreversible Vorgänge nicht ohne weiteres durch eine der beiden Formulierungen des zweiten Hauptsatzes beschreiben.

Alle irreversiblen Prozesse haben aber eines gemeinsam: Durch sie geht die Gesamtheit von System und Umgebung in einen Zustand höherer Unordnung über.

Als Maß für die Ordnung (oder Unordnung) eines Systems benutzt man eine Größe, die als *Entropie* bezeichnet wird. Auch sie ist eine thermodynamische Zustandsfunktion. Analog zur inneren Energie interessiert vor allem die Änderung der Entropie ΔS durch die betrachteten Prozesse

$$\Delta S = \int \frac{dQ_{rev}}{T}$$

Hier ist dQ die während eines reversiblen Prozesses vom System mit der Umgebung ausgetauschte Wärmemenge. Wird diese abgeführt, dann hat sie ein negatives Vorzeichen und die Entropie des Systems nimmt ab.

Es bedeutet aber nicht, daß das System Wärme mit der Umgebung austauschen muß, damit sich die Entropie ändert. Die Entropie kann sich auch so ändern, ohne daß Wärmeaustausch stattfindet. Die Gleichung liefert nur ein Verfahren, nach dem man die Entropiedifferenz zweier Zustände eines Systems berechnen kann. Die Änderung hängt vom Anfangs- und vom Endzustand ab. Will man sie berechnen, so muß man zunächst einen (tatsächlichen oder hypothetischen) reversiblen Prozeß finden, der Anfangs- und Endzustand verbindet, dann die

4. Festkörper, Flüssigkeiten und Gase

4.1 Atomare Modelle der Aggregatzustände

Im folgenden soll die Frage diskutiert werden, warum Materie in den verschiedenen Aggregatzuständen **fest, flüssig oder gasförmig** vorkommt und warum die Existenz dieser Zustände von der Temperatur abhängt.

Aus vielen experimentellen Ergebnissen wissen wir, daß alle Körper aus Atomen oder Molekülen aufgebaut sind. Zwischen zwei neutralen Atomen von denen jedes aus einem positiv geladenen Kern und einer negativ geladenen Elektronenhülle besteht, treten anziehende und abstoßende Kräfte auf. Die Überlagerung dieser Kräfte führt zu einer resultierenden Kraft $F(r)$ und einer potentiellen Energie $E_P(r)$, die vom Abstand r zwischen den beiden Atomkernen abhängt, wie dies in Abbildung 14 qualitativ dargestellt wird.

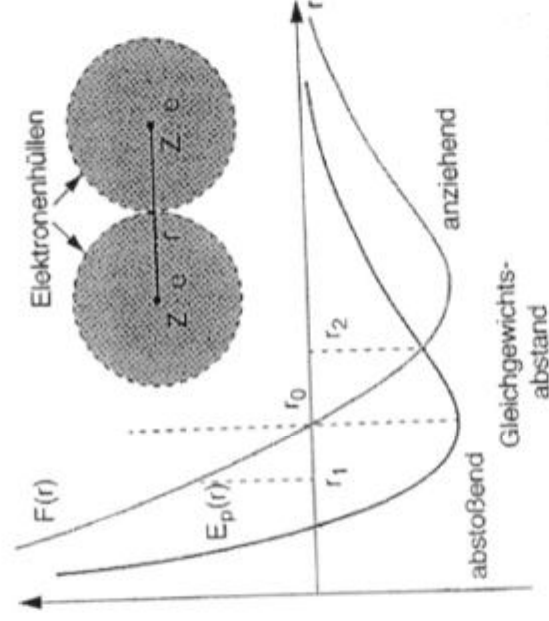


Abb.14 Qualitativer Verlauf von potentieller Energie $E_P(r)$ und Kraft $F(r)$ zwischen zwei Atomen als Funktion des Kernabstandes r .

In einem Abstand r_1 würden sich die Atome abstoßen, bei einem gegenseitigen Abstand r_2 dagegen anziehen. Der Gleichgewichtsabstand, den zwei Atome im Festkörper einnehmen ist gegeben durch r_0 (Abbildung 14), da sich dort die allseitig wirkenden Kräfte auf ein Atom im Festkörper aufheben ($F(r) = 0$) und die potentielle Energie ein Minimum hat.

Im festen Aggregatzustand können die Atome in einem regelmäßigen Gitter angeordnet sein (kristalliner Festkörper) (Abbildung 15) oder bei vergleichbarer Dichte mehr oder weniger statistisch verteilt sein (amorpher Festkörper).

Wenn man bei einem kristallinen Festkörper das Atom A_0 in den Nullpunkt eines Koordinatensystems setzt, so kann man die Ortsvektoren \vec{r}_i der anderen Atome A_i schreiben als

$$\vec{r}_i = n_1 \vec{a} + n_2 \vec{b} + n_3 \vec{c}$$

wobei die n_{α} ganze Zahlen sind ($\alpha = 1,2,3$, i = Anzahl der Atome im Festkörper) und die **Basisvektoren** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ die sogenannte Einheitszelle aufspannen.

3.16 Kältemaschinen und zweiter Hauptsatz

Eine Kältemaschine ist im Prinzip eine Wärmekraftmaschine mit umgekehrter Arbeitsrichtung. Der Vorrichtung wird Arbeit zugeführt und sie entnimmt Wärme aus dem kälteren Reservoir, um sie an das wärmere abzugeben. Es muß stets Arbeit aufgewendet werden, da die Übertragung entgegen der spontanen Richtung verläuft. Das Prinzip von Clausius formuliert den zweiten Hauptsatz für Kältemaschinen. Er lautet:

Es ist unmöglich, eine zyklisch arbeitende Kältemaschine zu konstruieren, die keinen anderen Effekt bewirkt, als Wärme von einem kälteren Reservoir in ein wärmeres zu übertragen.

Der Wirkungsgrad einer Kältemaschine ist definiert als

$$\epsilon_L = \frac{Q_K}{W}$$

Die Bezeichnung Leistungszahl ist vorzuziehen, denn ϵ_L ist, im Gegensatz zum Wirkungsgrad, größer als 1. Je größer die Leistungszahl ist, desto effizienter arbeitet die Maschine. Der Wert kann aber nicht unendlich werden, ebenso wie der Wirkungsgrad nicht 1 werden kann.

3.17 Carnot-Wirkungsgrad

Wie groß ist aber der maximale Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine? Diese Frage beantwortete Carnot 1824. Das Carnot Prinzip lautet:

Zwischen zwei gegebenen Wärmereservoirs hat die reversibel arbeitende Wärmekraftmaschine den höchsten Wirkungsgrad.

Wie schon gezeigt, liegt Reversibilität vor, wenn der jeweilige Vorgang so langsam abläuft, daß sich das System stets in einem Gleichgewichtszustand befindet und jeden Zustand auch in umgekehrter Reihenfolge wieder durchlaufen kann.

Man kann nun die Bedingungen für die Reversibilität von Prozessen zusammenfassen:

1. Es darf keine mechanische Energie aufgrund von Reibung, viskosen Kräften oder anderen dissipativen (nicht rückgängig zu machenden) Effekten in Wärme umgesetzt werden.
2. Es darf keine Wärmeleitung aufgrund einer endlichen Temperaturdifferenz vorliegen.
3. Der Prozeß (und alle Teilvorgänge) müssen quasistatisch ablaufen, so daß sich das System stets im Gleichgewichtszustand oder in infinitesimaler Abweichung davon befindet.

Jeder Prozeß, der auch nur eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, ist irreversibel. Dies ist bei den meisten natürlichen oder technischen Vorgängen der Fall.

Wenn aber keine Wärmekraftmaschine einen höheren Wirkungsgrad als die reversibel arbeitende Maschine haben kann, dann müssen alle reversiblen Maschinen, die zwischen denselben Wärmereservoirs arbeiten, denselben Wirkungsgrad besitzen. Man nennt ihn den *Carnot-Wirkungsgrad* ϵ_C . Er ist dadurch gekennzeichnet, daß er nicht von der Arbeitssubstanz, sondern ausschließlich von den Temperaturen der Reservoire abhängt.

Bei weiterer Erhöhung der Temperatur bis über den Siedepunkt wird die mittlere kinetische Energie \bar{E}_{kin} der Atome bzw. der Moleküle groß gegen die Bindungsenergie. Die Moleküle werden völlig frei beweglich, sie bilden ein Gas, das jeden angebotenen Raum ausfüllt.

4.1.1 Elastisch und plastisch deformierbare Festkörper

Unter dem Einfluß äußerer Kräfte kann ein fester Körper seine Gestalt ändern. Wenn nach Beendigung der Krafterwirkung die Deformation wieder vollständig verschwindet, der Körper also seine ursprüngliche Form wieder annimmt, nennt man der Körper **elastisch**. Bei einem **plastischen** Körper bleibt eine Formänderung zurück.

4.1.2 Hookesches Gesetz

Eine Quantifizierung des elastischen Verhaltens eines Festkörpers ist durch das **Hookesche Gesetz** gegeben.

Wirkt auf einen elastischen Körper der Länge L mit dem Querschnitt A eine Zugkraft F , so verlängert sich seine Länge L um ΔL . Die Experimente zeigen, daß bei genügend kleinem ΔL gilt:

$$F = EA \frac{\Delta L}{L}$$

Die Proportionalitätskonstante E heißt **Elastizitätsmodul**. Der Elastizitätsmodul gibt jene theoretische Spannung an die notwendig ist um einen Körper von der Länge L auf seine doppelte Länge auszudehnen. Einheit: $[\text{N m}^{-2}]$

Führt man die **Zugspannung** σ

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

und die relative **Dehnung** ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

ein, so erhält man das **Hookesche Gesetz** in der von der Geometrie des Körpers unabhängigen Form:

$$\sigma = E \varepsilon$$

Beispiele für den Elastizitätsmodul einiger Festkörper [in 10^9N m^{-2}]: Aluminium: 71, Kupfer: 125, Stahl: 200, Blei: 19, Wolfram: 407, Eis: (-4°C) 10.

4.2 Ruhende Flüssigkeiten, Hydrostatik

Um eine Gestaltsänderung fester Körper zu erreichen, muß man immer erhebliche Kräfte aufwenden, auch wenn das Volumen des Körpers bei der Verformung konstant bleibt. Die zur Verformung einer Flüssigkeit notwendiger Kräfte sind wesentlich kleiner als im festem Zustand und rühren von Reibungskräfte und Oberflächeneffekte her. Im folgenden soll das Modell einer idealen Flüssigkeit behandelt werden, für die sowohl Reibung als auch Oberflächeneffekte vernachlässigbar sind.

Das Gas befindet sich jetzt wieder im Anfangszustand mit dem ursprünglichen Wert der inneren Energie. Es muß daher die Summe aus zu- und abgeführter Wärme gleich der verrichteten Arbeit sein.

Es gilt $|W| = mgh$, denn die Arbeit besteht im Anheben der Masse m um die Höhe h . Aufgenommen wurde $Q_{\text{ein}} = Q_1 + Q_2$ und abgegeben wurde $|Q_{\text{aus}}| = |Q_3| + |Q_4|$. Damit ist die mechanische Arbeit

$$|W| = mgh = Q_{\text{ein}} - |Q_{\text{aus}}| = Q_1 + Q_2 - |Q_3| - |Q_4|$$

Jede Wärmekraftmaschine enthält eine sogenannte Arbeitssubstanz. Bei der Dampfmaschine ist dies Wasser und beim Verbrennungsmotor ein Benzindampf/Luft-Gemisch. Die Arbeitssubstanz nimmt bei der Temperatur T_W die Wärmemenge Q_W auf, verrichtet die Arbeit W und gibt bei der tieferen Temperatur T_K die Wärmemenge Q_K ab. Dann kehrt sie in den Anfangszustand zurück, so daß insgesamt ein Kreisprozeß abläuft.

Die von der Maschine verrichtete Arbeit ist gleich der einem Wärmereservoir entnommenen und dem System zugeführten Wärmemenge Q_W , verringert um die an ein Kältereservoir abgeführte Wärme Q_K . Unter einem Wärmereservoir versteht man eine idealisierte Vorrichtung, deren Wärmekapazität so groß ist, daß sie beliebige Wärmemengen aufnehmen oder abgeben kann, ohne daß sich ihre Temperatur merklich ändert.

Es ist nach dem ersten Hauptsatz

$$\Delta U = Q + W = Q_K + Q_W + W = 0$$

oder

$$|W| = Q_W - |Q_K|$$

Wichtig bei allen Maschinen ist ihre Effizienz, das heißt das Verhältnis von abgegebener zu aufgewandter Energiemenge. Der Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine ist definiert als Quotient aus verrichteter Arbeit und zugeführter Wärme

$$\varepsilon = \frac{|W|}{|Q_W|} = \frac{|Q_W| - |Q_K|}{|Q_W|} = 1 - \frac{|Q_K|}{|Q_W|}$$

Ein Wirkungsgrad von 1 wäre nur zu erzielen, wenn $Q_K = 0$ ist. Dann würde die gesamte zugeführte Wärme in Arbeit umgewandelt und keine Wärme an das kältere Reservoir abgegeben werden.

4.2.1 Statischer Druck in Flüssigkeiten

Wird ein Gefäß, das eine Flüssigkeit enthält, mit einem Kolben der Fläche A abgeschlossen, auf dem eine Kraft F wirkt, so ist der Druck definiert durch:

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{mit } F = |\vec{F}|$$

Einheit: $[\text{N m}^{-2}]$, ($1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$, und $10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$).

Da in einer idealen, ruhenden Flüssigkeit keine Tangentialkräfte auftreten, ist der Druck im gesamten Flüssigkeitsvolumen konstant.

Berücksichtigt man, daß jedes Volumenelement $dV = Adz$ der Flüssigkeit im Schwerfeld der Erde selbst eine Gewichtskraft von $\rho g A dz$ hat, so wirkt auch ohne zusätzliche äußere Kraft auf den Boden des Gefäßes ein Druck.

Bei einer Flüssigkeitstiefe H ist dieser Schweredruck am Boden auf eine Flächen A

$$p(0) = \int_0^H \frac{g\rho A}{A} dz = g\rho H.$$

Ist die Dichte der Flüssigkeit nicht vom Druck abhängig, d.h. die Flüssigkeit ist inkompressibel, so folgt für den Druck in der Höhe z :

$$p(z) = g\rho(H - z).$$

(siehe dazu Abb. 22b).

4.2.2 Auftrieb in einer Flüssigkeit (Archimedisches Prinzip)

Taucht man einen Quader mit der Grundfläche A , der Dichte ρ_K in eine Flüssigkeit der Dichte ρ_{Fl} , so ist der Druckunterschied zwischen der Ober- und Unterseite des Körpers gegeben durch:

$$\Delta p = \rho_{Fl} g(h_2 - h_1) = \rho_{Fl} g \Delta h.$$

Die nach oben gerichtete Auftriebskraft F_A (siehe Abbildung 18) ist gleich der nach unten gerichteten Gewichtskraft G_{Fl} des verdrängten Flüssigkeitsvolumen (Konsequenz des 3. Newtonschen Gesetzes). Vergleicht man die Beträge dieser Kräfte so folgt:

$$F_A = \Delta p A = \rho_{Fl} g \Delta h A = G_{Fl}$$

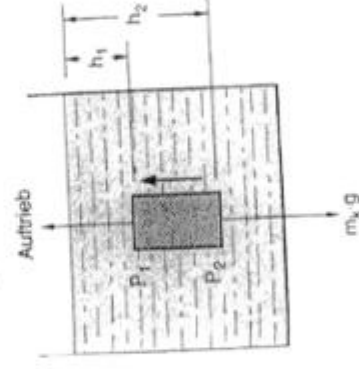


Abb. 18 Auftrieb und Archimedisches Prinzip

Durch Integration folgt

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$$
$$\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{konst.}$$

Mit den Regeln der Logarithmenrechnung wird daraus

$$\ln(TV^{\gamma-1}) = \text{konst.}$$

und

$$TV^{\gamma-1} = \text{konst.}$$

Man kann T einsetzen aus der Formel $pV = nRT$ und erhält

$$\frac{pV}{nR} V^{\gamma-1} = \text{konst.}$$

oder

$$pV^\gamma = \text{konst.}$$

Diese Gleichung, die *Adiabatengleichung*, verknüpft Druck und Volumen bei der reversiblen adiabatischen Expansion oder Kompression.

Man kann die adiabatische Kompressibilität eines idealen Gases durch differenzieren der Gleichung berechnen

$$p\gamma V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dp = 0$$

$$dp = -\frac{\gamma p dV}{V}$$

Man definiert die Kompressibilität κ als den Quotienten aus Druckänderung $-dp$ und relativer Volumsänderung dV/V . Damit gilt:

$$\kappa_{\text{adiab}} = -\frac{dp}{dV/V} = \gamma P$$

Die vom Gas verrichtete Arbeit ist gleich der Fläche unter der Kurve in Abb. 51. Diese Arbeit hängt von der Temperaturänderung ab. Mit $dQ = 0$ wird

$$dQ = dU - dW = C_V dT + p dV = 0$$

zu

$$p dV = -C_V dT$$

Damit ist die adiabatische Arbeit

$$W_{\text{adiab}} = -\int p dV = \int C_V dT$$

oder

$$W_{\text{adiab}} = C_V \Delta T$$

Für ein ideales Gas darf C_V konstant angenommen werden, weil dessen innere Energie proportional zur absoluten Temperatur ist und daher $C_V = dU / dT$ konstant ist.

Man kann die Volumsarbeit auch durch Volumen- und Temperaturänderungen ausdrücken. Bezeichnet man den Anfangszustand mit 1 und den Endzustand mit 2, so gilt

$$W_{\text{adiab}} = C_V \Delta T = C_V (T_2 - T_1)$$

4.3.2 Bernoulli Gleichung

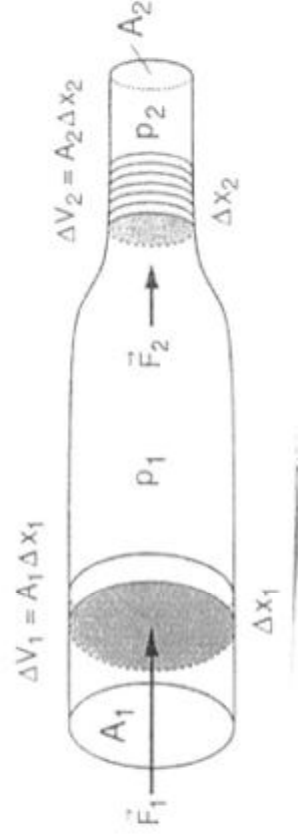


Abb. 19 Zur Herleitung der Bernoulli Gleichung

Die Arbeit die gegen den Druck p_1 verrichtet werden muß, um das Flüssigkeitsvolumen $\Delta V_1 = A_1 \Delta x_1$ durch eine vorgegebene Fläche A_1 hindurch zu bewegen ist

$$\Delta W_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V_1 .$$

Im engen Teil der Röhre ist $\Delta V_2 = A_2 \Delta x_2$ und die Arbeit die nötig ist um ΔV_2 zu verschieben, ist

$$\Delta W_2 = p_2 A_2 \Delta x_2 = p_2 \Delta V_2 .$$

Durch diese Arbeit die von der gesamten Flüssigkeit an einem Volumenelement ΔV verrichtet wird, wird die **potentielle Energie** dieses Volumenelement geändert. Die **kinetische Energie** des Volumenelement ΔV mit der Masse Δm ist:

$$E = \frac{1}{2} \Delta m u^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V u^2 .$$

Für reibungsfreie Flüssigkeiten muß die Summe aus potentieller und kinetischer Energie konstant bleiben (Energieerhaltungssatz),

$$p_1 \Delta V_1 + \frac{1}{2} \rho \Delta V_1 u_1^2 = p_2 \Delta V_2 + \frac{1}{2} \rho \Delta V_2 u_2^2 .$$

Wegen der angenommenen Inkompressibilität der Flüssigkeit gilt $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V = konst.$. Damit folgt für die **Bernoulli Gleichung**:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2$$

oder in der allgemeineren Form:

$$p + \frac{1}{2} \rho u^2 = p_0 = konst. ,$$

$$U = \frac{5}{2} nRT$$

Demnach müßten die Gase fünf Freiheitsgrade besitzen. 1880 postulierte Clausius, daß ihre Moleküle zweiatomig sind und deshalb um zwei Achsen rotieren können. Von daher stammen die beiden weiteren Freiheitsgrade zusätzlich zur Translation.

Die Wärmekapazität von n Molen eines zweiatomigen Gases bei konstantem Volumen beträgt daher

$$C_V = \frac{5}{2} nR$$

In einem Festkörper hat ein Atom sechs Freiheitsgrade, weil es in jede Raumrichtung um seine Ruhelage schwingen kann. Somit ist die innere Energie von n Molen

$$U = 6 \cdot \frac{1}{2} nRT = 3nRT$$

Und daraus folgt seine innere Wärmekapazität:

$$C_m = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = 3R$$

Abschließend noch eine Bemerkung:

Obwohl sich mit Hilfe des Gleichverteilungssatzes die gemessenen Wärmekapazitäten vieler fester und gasförmiger Substanzen erklären lassen, gibt es doch deutliche Abweichungen.

So sollte ein zweiatomiges Molekül, wenn man es als Hantel mit zwei nicht punktförmigen Atomen auffaßt, einen dritten Freiheitsgrad der Rotation haben (um die Verbindungssachse). Außerdem ist ein solches Molekül niemals völlig starr, seine Bindungslänge ändert sich, wenn die Atome schwingen. Daraus sollten zwei weitere Freiheitsgrade folgen.

Auch sollte nach dem Gleichverteilungssatz die Wärmekapazität der Gase nicht von der Temperatur abhängen. Genauere Messungen zeigen aber, daß dies der Fall ist. Ebenso sollte die Wärmekapazität von Festkörpern konstant $3R$ betragen, bei allen Temperaturen. In Wahrheit geht sie aber bei tiefen Temperaturen gegen Null.

Der Grund für all dies liegt im Versagen der klassischen Mechanik, wenn sie auf Systeme mit atomaren Größenordnungen angewandt wird.

Randbedingung: $u(r=R)=0 \rightarrow$

$$C = -\frac{(p_1 - p_2)R^2}{2\eta L} \cdot 2$$

$$u(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{2\eta L} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right)$$

Der Geschwindigkeitsverlauf über den Rohrquerschnitt ist **parabolisch**.
Berechnung der Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit durch den Rohrquerschnitt:

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r dr u(r)$$

Durch Integration über das Zeitintervall $t_1 \rightarrow t_2$ und den Radius erhält man:

$$V = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta L} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{r=0}^{r=R} (r^3 - rR^2) dr$$

$$V = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta L} \Delta t \frac{R^4}{4}$$

Man beachte die R^4 -Abhängigkeit des Flüssigkeitsstroms in der Zeiteinheit $V/\Delta t$!
Unser Körper benutzt diese starke Abhängigkeit des Blutstroms vom Aderdurchmesser um den Blutstrom zu regulieren.

Die vom Gas bei der isothermen Expansion von V_1 auf V_2 verrichtete Volumsarbeit ist damit

$$W_{\text{isotherm}} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV$$

oder

$$W_{\text{isotherm}} = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Da das ideale Gas beim Anfangs- und beim Endzustand aller drei Wege dieselbe Temperatur hat, kann sich seine innere Energie insgesamt nicht verändert haben. Also muß eine der jeweiligen Volumsarbeit äquivalente Wärmemenge zu- oder abgeführt worden sein. Man sieht hier, daß die mit der Umgebung ausgetauschten Mengen an Arbeit und Wärme vom Weg der Zustandsänderung abhängen. Dies gilt jedoch nicht für die innere Energie, die eine Zustandsfunktion ist.

3.13.3 Wärmekapazitäten und Gleichverteilungssatz

Die Wärmekapazität einer Substanz liefert Informationen über deren innere Energie, genauer gesagt über ihre Temperaturabhängigkeit. Daraus kann man auf bestimmte molekulare Eigenschaften schließen. Bei Substanzen, die sich beim Erwärmen ausdehnen, ist die Wärmekapazität bei konstantem Druck C_p größer als bei konstantem Volumen C_V , weil bei konstantem äußeren Druck durch die Ausdehnung Volumsarbeit verrichtet wird. Dies spielt bei Flüssigkeiten und Festkörpern praktisch keine Rolle. Bei Gasen aber muß zwischen C_p und C_V streng unterschieden werden.

Wird einem Gas bei konstantem Volumen Wärme zugeführt, tritt keine Volumsarbeit auf und $dW = 0$. Daher ist die zugeführte Wärmemenge

$$dQ_V = C_V dT$$

nach dem ersten Hauptsatz gleich der Erhöhung der inneren Energie

$$dQ_V = dU - dW = dU$$

Es folgt

$$dU = C_V dT$$

und

$$C_V = \frac{dU}{dT}$$

Die Wärmekapazität bei konstantem Volumen ist also gleich der Änderung der inneren Energie mit der Temperatur.

Wird einem Gas bei konstantem Druck Wärme zugeführt, kann wegen der Volumsarbeit nur ein Teil der Wärme zur Erhöhung der inneren Energie dienen. Also muß bei konstantem Druck mehr Energie zugeführt werden um dieselbe Temperaturerhöhung zu bewirken wie bei konstantem Volumen. C_p ist größer als C_V .

Die Wärmekapazität bei konstantem Druck ist definiert durch

$$dQ_p = C_p dT$$

Dieser Druck erzeugt im Torricelli - Quecksilbermanometer eine Höhendifferenz Δh (Abbildung 21) von 760 mm das entspricht 760 Torr.

Für die Umrechnung zwischen den verschiedenen Maßeinheiten für den Druck gilt:
1 physikalische Atmosphäre = $1,01325 \cdot 10^5$ Pa = 1013,25 mbar = 760 Torr.

Das Gewicht der auf einer Fläche A in der Höhe h lastenden Luftsäule nimmt mit zunehmender Höhe ab. Beim Anstieg von h auf $h+dh$ nimmt daher der Druck p um den Schweredruck der Luftsäule zwischen h und $h+dh$ ab,

$$dp = -\rho g dh .$$

Im Gegensatz zu einer Flüssigkeit ist die Dichte ρ eines Gases vom Druck abhängig. Aus dem Boyle- Mariottischen Gesetz folgt:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{p_0} p .$$

Womit man erhält:

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} p g dh .$$

Trennung der Variablen ergibt:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh$$

durch Integration erhält man

$$\ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} g h + C .$$

Mit der Randbedingung $p(h=0)=p_0$ ergibt sich

$$\ln p_0 = C$$

und damit die **barometrische Höhenformel**:

$$p = p_0 e^{(-\rho_0 / p_0) g h} .$$

Wegen

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$$

erhält man für die Abhängigkeit der Dichte von der Höhe eine analoge Gleichung

$$\rho = \rho_0 e^{(-\rho_0 / p_0) g h} .$$

Atome verschieden. Wenn aber die Gasmoleküle in keiner Wechselwirkung (wie beim idealen Gas angenommen) miteinander stehen so liegt die gesamte innere Energie U der betreffenden Gasmenge als Energie der Moleküle vor und hängt nur von der Temperatur ab, nicht dagegen vom Volumen oder vom Druck.

Anders ist die Situation beispielsweise bei realen Gasen mit hohen Dichten. Dann ist der Abstand der Moleküle klein und diese üben aufeinander Anziehungskräfte aus. Es muß Arbeit aufgewendet werden, um das Volumen zu erhöhen und die innere Energie ändert sich nicht nur mit der Temperatur, sondern auch mit dem Volumen des Gases.

3.13.2 p - V -Diagramm eines Gases und Volumsarbeit

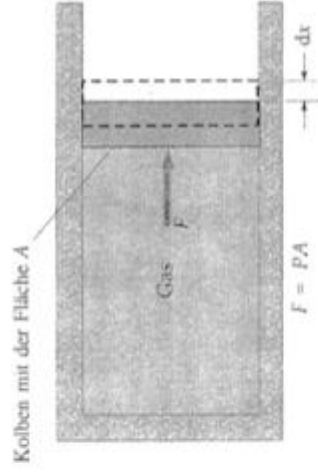


Abb. 48

Eine bestimmte Gasmenge mit dem Druck p befindet sich in einem thermisch isolierten Zylinder, der mit einem reibungsfrei beweglichen, dicht schließenden Kolben der Fläche A verschlossen ist. Wird dieser um die Strecke dx bewegt, dann ändert sich das Volumen um $dV = A \cdot dx$ und die vom Gas verrichtete Arbeit hat den Betrag $p \cdot A \cdot dx = p \cdot dV$.

Abb. 48 zeigt ein (ideales) Gas in einem Behälter, der mit einem reibungsfrei beweglichen Kolben verschlossen ist. Drückt man den Kolben sehr schnell hinein, so wird am Anfang der Druck nahe am Kolben höher sein als am Boden des Gefäßes und man kann die makroskopischen Variablen p , T und U erst definieren, wenn sich das Gas wieder in thermischem Gleichgewicht befindet. Das Gasvolumen V ist erst dann über die Zustandsgleichung $pV = nRT$ mit dem Druck p und der Temperatur T verknüpft.

Bewegt man den Kolben jedoch sehr langsam und wartet jeweils die Einstellung des Gleichgewichts ab, so befindet sich das Gas praktisch zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht. Solche Zustände nennt man quasi-statisch oder reversibel, weil mit infinitesimaler Änderung einer Größe in die andere Richtung der Prozeß umgekehrt werden kann.

Ein Gas mit hohem Druck soll nun reversibel expandieren. Es übt auf den Kolben mit der Fläche A die Kraft $F = pA$ aus. Der Druck ändert sich während der Ausdehnung, wenn die Temperatur konstant gehalten wird. Damit die Expansion reversibel abläuft, muß eine vom Betrag her gleich große Gegenkraft $-|pA|$ auf den Kolben wirken. Der Kolben verrichtet also Arbeit gegen diese Kraft. Bewegt er sich um die infinitesimale Strecke dx , so ist die Arbeit

$$dW = -|F|dx = -|pA|dx = -pdV$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, es wird Arbeit vom System an der Umgebung verrichtet.

Der Zustand einer Gasmenge läßt sich als Punkt im pV -Diagramm darstellen.

Abb. 49 zeigt den Vorgang bei einer isobaren Expansion im p - V -Diagramm bei einem Druck p_0 (Ein Zustand des Gases sei gegeben durch p_0 und V_0 .)

5. Schwingungen und Wellen

Schwingungen und Wellen spielen in allen Lebensbereichen eine sehr große Rolle, z.B. in der Akustik, der Musik, also beim Hören. Elektromagnetische Wellen sind wesentlich in der Funktechnik und auch der Optik. Der Ausdruck Wellenmechanik für die Beschreibung atomarer Vorgänge weist darauf hin, daß das Wellenkonzept auch für die Physik der atomaren Dimensionen von entscheidender Bedeutung ist.

Es ist daher von großem didaktischen Nutzen sich mit den Grundlagen von Schwingungen und Wellen schon im Rahmen der Mechanikvorlesung vertraut zu machen.

5.1 Ungedämpfter harmonischer Oszillator

Ein an einer Feder hängender Körper mit der Masse m hat eine Ruhelage bei $x=0$, in der die Schwerkraft gerade durch die Federkraft kompensiert wird.

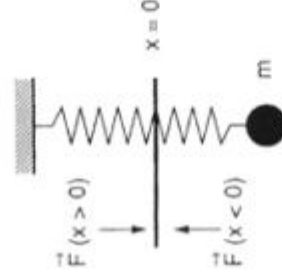


Abb. 23 Ungedämpfter harmonische Oszillator

Wird die Masse m aus der Ruhelage ausgelenkt, so wirkt durch die Feder eine zusätzliche rücktreibende Kraft

$$F = -Dx$$

wobei D die Federkonstante und x die Auslenkung ist.

Wendet man auf dieses Problem das 2. Newtonsche Gesetz an, so erhält man die folgende Differentialgleichung für diesen Bewegungsvorgang:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Dx,$$

oder durch Einführen der Abkürzung $\omega_0^2 = D/m$ (Eigenfrequenz), die Differentialgleichung für den **harmonischen Oszillator**:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

wobei A (Amplitude) und φ (Phase) die beiden Parameter dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung sind. Um zu überprüfen ob diese Funktion eine Lösung der Differentialgleichung ist, setzt man in die Differentialgleichung ein und fordert, daß diese identisch erfüllt ist.

Experimentelle und theoretische Arbeiten zur spektralen Verteilung der Strahlung eines schwarzen Körpers waren bei der Entwicklung der modernen Physik von außerordentlicher Bedeutung. Es zeigte sich, daß die tatsächliche Wellenlängenabhängigkeit von der Temperatur stark von derjenigen abwich, die mit den Gesetzen der klassischen Physik berechnet wurde. Die Erklärung dieser Diskrepanz führte Max Planck 1900 zur Hypothese von der Quantisierung der Energie, was in einem späteren Abschnitt noch behandelt wird.

3.13 Der erste Hauptsatz

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik ist eine Aussage über die Energieerhaltung, genauer eine Aussage über die von oder an einem System verrichtete Arbeit, sowie über die zugeführte oder entnommene Wärme und über seine *innere Energie*.

Man kann zum Beispiel durch Zufuhr einer bestimmten Wärmemenge 1g Wasser um 1°C erwärmen. Man kann aber den Energieinhalt des Wassers oder irgendeines anderen Systems auch *ohne* Wärmezufuhr erhöhen, indem man Arbeit an ihm verrichtet.

James Joule konnte experimentell beweisen, daß mechanische Arbeit und Wärme äquivalent sind. Die Experimente ergaben, daß die Zufuhr von $4,18N \cdot m$ an mechanischer Energie, die Temperatur von 1g Wasser um 1°C erhöht. (Früher gab man die Wärmeenergie in Kalorien an und sprach vom „mechanischen Wärmeäquivalent“: $1cal = 4,18N \cdot m$)

Allgemein gilt, daß für eine bestimmte Temperaturerhöhung eines gegebenen Systems stets dieselbe Menge an mechanischer Arbeit aufgewendet werden muß - gleichgültig, in welcher Form man die Energie dem System zuführt. Wegen der Energieerhaltung bewirkt die zugeführte Energie eine Erhöhung der inneren Energie U des Systems, die die kinetische und die potentielle Energie aller Moleküle des Systems beinhaltet.

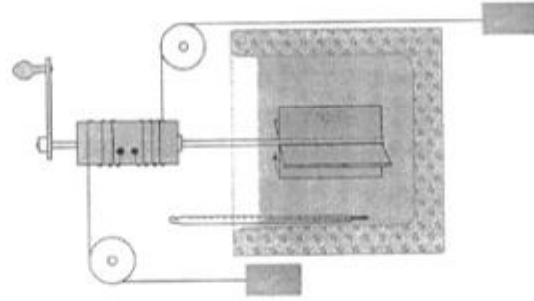


Abb. 47

Schema der Apparatur von Joule zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents. Das Wasser ist gegen die Umgebung thermisch isoliert, so daß keine Wärme übertragen werden kann. Beim Herunterfallen der Massenstücke wird über die Seile die Walze gedreht, die mit dem Schaufelrad im Wasser fest verbunden ist. Vernachlässigt man die Reibung, dann ist die vom Schaufelrad auf das Wasser übertragene Arbeit gleich der Abnahme der potentiellen Energie der Massenstücke, die aus der Höhendifferenz und den Massen leicht zu berechnen ist.

Um zum ersten Hauptsatz zu gelangen, wiederholt man das Experiment von Joule, diesmal jedoch mit thermisch leitenden Behälterwänden. Dann zeigt sich, daß die Arbeit, die benötigt wird, um eine bestimmte Temperaturerhöhung des Systems zu erreichen, nicht konstant ist. Sie hängt nun davon ab, wieviel Wärme das System infolge Wärmeleitung durch die Wände abgibt. Mißt man beide Energien, die mit der Umgebung ausgetauschte Wärme *und* die aufgewandte,

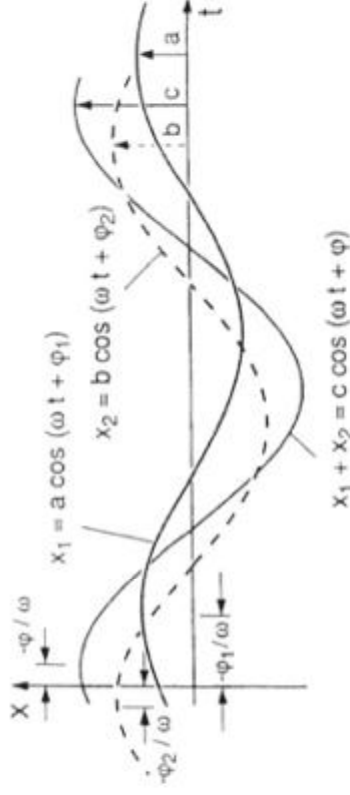


Abb. 25 Eindimensionale Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz ω aber verschiedener Phasen φ_1 und φ_2 .

5.1.3 Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Richtung und Amplitude mit verschiedener Frequenz (Schwebung)

$$x_1(t) = a \cos \omega_1 t$$

$$x_2(t) = a \cos \omega_2 t$$

erhält wegen

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

folgender Form:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

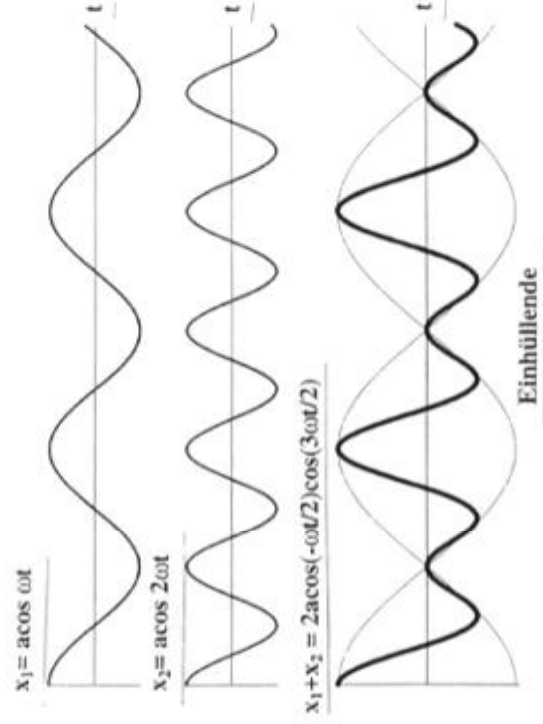


Abb. 26 Überlagerung zweier Schwingungen mit der gleichen Amplitude und den Frequenzen ω und 2ω .

3.12.1 Wärmeleitung



(a)



(b)

Abb. 44

a) Die Enden eines runden, wärmeleitenden Stabes werden beispielsweise mit Hilfe von Wasserdampf und Eis auf unterschiedlichen Temperaturen gehalten. Es fließt Wärme vom heißen zum kalten Ende. b) Entlang dem Abschnitt Δx des Stabes ändert sich die Temperatur um ΔT .

In der Abb. 44 sieht man einen zylindrischen Stab mit dem Querschnitt A , dessen Enden auf unterschiedlichen Temperaturen gehalten werden. Nach einiger Zeit stellt sich ein stationärer Zustand ein, bei dem die Temperatur gleichmäßig zum kälteren Ende hin abnimmt, wenn der Stab überall den gleichen Querschnitt hat.

Die Änderung der Temperatur entlang des Stabes heißt Temperaturgradient. Durch den Querschnitt des Stabes fließt in der Zeit Δt die Wärmemenge ΔQ und damit der Wärmestrom I

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

bzw. in differentieller Schreibweise

$$I = \frac{dQ}{dt} = \lambda A \frac{dT}{dx}$$

Die Proportionalitätskonstante λ nennt man *Wärmeleitfähigkeit*. Sie ist eine materialabhängige Konstante. Auflösen nach ΔT liefert

$$\Delta T = \frac{\Delta x}{\lambda A} I$$

oder

$$\Delta T = IR$$

Man nennt $R = \frac{\Delta x}{\lambda A}$ den *Wärmewiderstand*.

3.12.2 Strahlung

Neben Wärmeleitung und Konvektion kann ein Körper Wärmeenergie durch elektromagnetische Strahlung abgeben oder aufnehmen. *Die abgestrahlte Leistung P_e ist proportional zur Oberfläche A und zur vierten Potenz der absoluten Temperatur*. Dies ist die Aussage des *Stefan-Boltzmann-Gesetzes*, das von Stefan 1879 empirisch gefunden und von Boltzmann fünf Jahre später theoretisch begründet wurde. Es lautet also

$$P_e = \epsilon \sigma A T^4$$

5.2 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Läßt man die Masse des freien Oszillators in einer Flüssigkeit schwingen, so kann die Reibung nicht mehr vernachlässigt werden und zur rücktreibenden Federkraft $F = -Dx$ kommt noch die **Stokesche Reibungskraft** (für kleine Geschwindigkeiten):

$$F_r = -6\pi\eta r v = -bv$$

für eine mit $v (= dx/dt)$ bewegte kugelförmigen Masse mit dem Radius r .

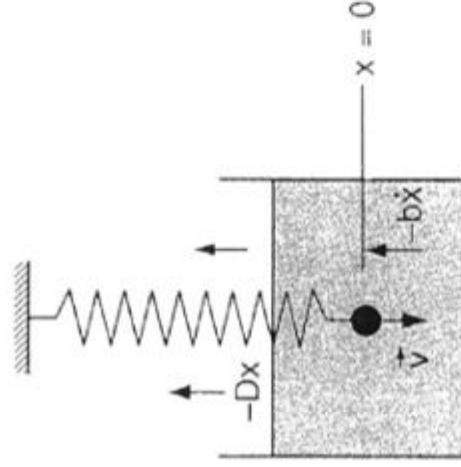


Abb. 28 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Die Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator lautet also:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Dx - b \frac{dx}{dt}$$

Mit den Abkürzungen $\omega_0^2 = D/m$ und $2\gamma = b/m$ hat sie die Form:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung ist gegeben durch:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

wobei A und φ die beiden Parameter sind, die durch Anfangsbedingungen festzulegen sind.

Verschwinden von Wärme mit einer entsprechenden Menge mechanischer Energie verknüpft ist. Die Versuche von Joule und anderen machten deutlich, daß Wärme und mechanische Energie nicht unabhängig voneinander erhalten bleiben. Das Verschwinden mechanischer Energie bewirkt nämlich das Auftreten eines äquivalenten Betrages an Wärmeenergie. Erhalten bleibt stets die Summe aus mechanischer Energie und Wärmeenergie (wenn man von anderen Formen der Energie, z.B. chemischer oder elektrischer, einmal absteht).

3.10 Wärmekapazität, Spezifische Wärme

Wird einer Substanz Wärmeenergie zugeführt, dann steigt im allgemeinen die Temperatur. Eine Ausnahme, die später besprochen wird, bilden die Phasenübergänge. Die für einen Temperaturanstieg ΔT nötige Wärmemenge Q ist proportional zu ΔT und zur Masse m der vorhandenen Substanzmenge

$$Q = C \cdot \Delta T = m \cdot c \cdot \Delta T$$

Dabei ist C die *Wärmekapazität*, d.h. die Wärmemenge, die erforderlich ist, um die vorliegende Substanzmenge um 1K oder 1°C zu erwärmen. Die spezifische Wärme c ist die Wärmekapazität pro Masseneinheit einer Substanz:

$$c = \frac{C}{m}$$

Als Einheit wurde früher die Kalorie als Wärmemenge definiert, durch die 1g Wasser um 1°C erwärmt wird. Heute wird die SI-Einheit Joule verwendet und es ist 1cal = 4,1868 J.

Die Wärmekapazität pro Mol der betreffenden Substanz heißt molare Wärmekapazität C_m . Sie ist gleich dem Produkt aus spezifischer Wärme c und molarer Masse M :

$$C_m = Mc$$

und damit ist die Wärmekapazität von n Mol einer Substanz

$$C = nC_m$$

Die spezifische Wärme hängt davon ab, ob sich eine Substanz bei der Erwärmung ausdehnt. Hält man das Volumen konstant, so dient die gesamte zugeführte Wärmemenge zur Temperaturerhöhung.

Wird das aber nicht gemacht, so wird ein Teil in mechanische Arbeit umgesetzt, die die Substanz bei der Volumsvergrößerung gegen den äußeren Druck verrichtet (siehe Kapitel 3.13.3).

Bei Flüssigkeiten und Festkörpern ist die Volumsarbeit meist relativ gering und kann daher vernachlässigt werden. Gase aber dehnen sich beim Erwärmen unter konstantem Druck sehr stark aus und verrichten dabei eine beträchtliche Volumsarbeit.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Dx = F_0 \cos(\omega t)$$

oder mit den Abkürzungen $\omega_0^2 = D/m$, $2\gamma = b/m$ und $K = F_0/m$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = K \cos(\omega t)$$

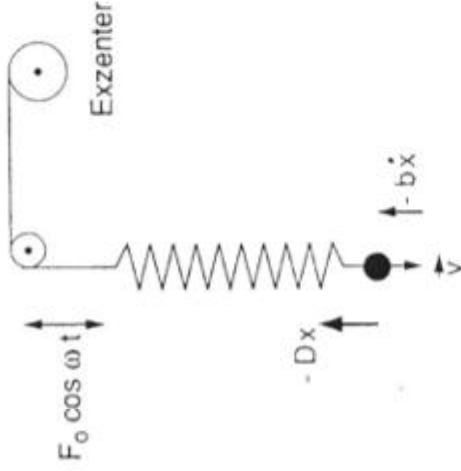


Abb. 30 Erzwungene gedämpfte Schwingung.

Die allgemeine Lösung einer solchen inhomogenen Differentialgleichung setzt sich zusammen aus der **allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung** (siehe gedämpfter Oszillator) plus einer **speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung**. Sie muß daher die Form haben:

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

wobei $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ die Frequenz der freien gedämpften Schwingung (bei schwacher Dämpfung) ist. Für genügend lange Zeit $t \gg 1/\gamma$ wird die Amplitude $A_1 \exp(-\gamma t)$ des ersten Terms so klein, daß man sie gegenüber dem zweiten Term vernachlässigen kann. Der zweite Term wird von der Frequenz ω der äußeren Kraft bestimmt.

Die äußere Kraft zwingt dem System seine Schwingungsfrequenz auf (daher erzwungene Schwingung), das System hat einen **stationären Zustand** erreicht. Um die Bewegungsgleichung des getriebenen Oszillators im stationären Zustand zu erhalten macht man folgenden **Ansatz**:

$$x(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

der als zwei frei zu bestimmende Parameter die Amplitude A_2 und die Phase φ enthält. Wie die Amplitude A_2 und die Phase φ von den Eigenschaften des Systems abhängen, sieht man durch Einsetzen des obigen Ansatzes in:

Damit kann man schreiben

$$f(v) dv = C \cdot v^2 \cdot e^{-mv^2/(2kT)} dv = C \cdot v \cdot e^{-W/kT} v dv = C \left(\frac{2W}{m} \right)^{1/2} e^{-W/kT} \frac{dW}{m}$$

laut oben angeführter Gleichung ist $C = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2}$

Die Energieverteilungsfunktion lautet dann

$$f(W) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{m} W^{1/2} e^{-W/kT}$$

durch Vereinfachen erhält man die übliche Schreibweise der Maxwell-Boltzmann-Energieverteilung, die proportional zu $\sqrt{W} e^{-W/kT}$ ist:

$$f(W) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} W^{1/2} e^{-W/kT}$$

3.7 Die Van-der-Waals-Gleichung

Die meisten Gase zeigen bei Atmosphärendruck ideales Verhalten. Von diesem weichen sie aber bei steigendem Druck oder fallender Temperatur immer stärker ab, weil die Gasdichte zunimmt und die Teilchen im Mittel nicht mehr sehr weit voneinander entfernt sind. Die Van-der-Waals-Gleichung ist eine Zustandsgleichung, die das Verhalten vieler realer Gase über weite Druckbereiche besser beschreibt als die Zustandsgleichung für ideale Gase. Für n Mole eines Gases lautet sie

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - bn) = nRT$$

Die Konstante b rührt daher, daß die Gasmoleküle nicht punktförmig sind, sondern eine endliche Ausdehnung, also ein Eigenvolumen haben. Dadurch ist das für ihre Bewegung verfügbare Volumen kleiner als bei der idealen Beschreibung. Die Größe b ist gleich dem Volumen aller Moleküle eines Mols des betreffenden Gases.

Der Term an^2/V^2 berücksichtigt die gegenseitige Anziehung der Gasmoleküle. Die Konstante a hängt von der Art des Gases ab und ist klein für Edelgase, deren Moleküle nur geringe Anziehungskraft aufeinander ausüben. Mit zunehmendem Volumen bzw. abnehmender Dichte werden diese Terme bn und an^2/V^2 kleiner, und die Gleichung geht schließlich in die Zustandsgleichung für ideale Gase über.

Beim getriebenen Oszillator wird durch die äußere Kraft Leistung dem System zugeführt, so daß die durch den Reibungsverlust verlorene Leistung gerade kompensiert wird.

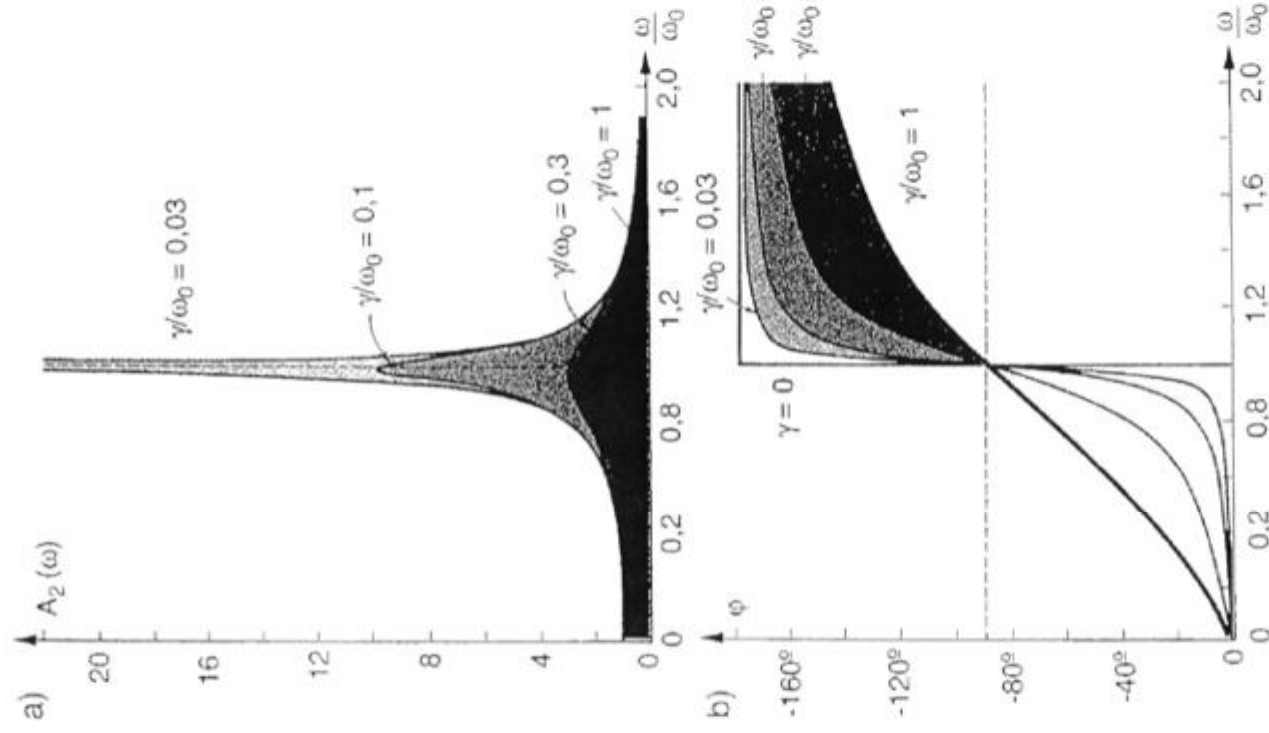


Abb. 31 Abhängigkeit der Amplitude A_2 und der Phasendifferenz φ von der normierten Treiberfrequenz ω/ω_0 für verschiedene Dämpfungen γ/ω_0 .

$$p = \frac{N}{V} m v_x^2$$

und

$$pV = Nm v_x^2$$

Man ersetzt die Geschwindigkeit durch den Mittelwert $\langle v_x^2 \rangle$:

$$pV = 2N \left\langle \frac{1}{2} m v_x^2 \right\rangle$$

Für sehr geringe Gasdichten ergibt sich

$$pV = NkT = 2N \left\langle \frac{1}{2} m v_x^2 \right\rangle$$

und

$$\left\langle \frac{1}{2} m v_x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} kT$$

Also ist die mittlere kinetische Energie in Richtung der x -Achse gleich $\frac{1}{2} kT$. Natürlich ist die x -Richtung in keiner Weise bevorzugt, und mit $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$ folgt also für die mittlere kinetische Energie eines Moleküls folgt also

$$\langle W_{kin} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT$$

Die absolute Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie (der Translationsbewegung) der Moleküle.

Die gesamte Translationsenergie von n Mole eines Gases mit insgesamt N Molekülen ist

$$\langle W_{kin} \rangle = N \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} nRT$$

Mit Hilfe dieses Ergebnisses kann man die Größenordnung der Molekülgeschwindigkeit in Gasen abschätzen. Der Mittelwert von v^2 ist

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m} = \frac{3N_A kT}{N_A m} = \frac{3RT}{M}$$

wobei $M = N_A m$ die molare Masse ist. Die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat ist die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit

$$v_m = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

ergeben sich die beiden entkoppelten Gleichungen:

$$m \frac{d^2 \xi^+}{dt^2} = -D \xi^+$$

$$m \frac{d^2 \xi^-}{dt^2} = -(D + 2D_{12}) \xi^-$$

für die $\xi^+(t)$ und $\xi^-(t)$.

Die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen sind (siehe auch Kap.5.1):

$$\xi^+(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\xi^-(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

mit $\omega_1^2 = D/m$ und $\omega_2^2 = (D + 2D_{12})/m$ (A_1, A_2, φ_1 und φ_2 sind die durch die Anfangsbedingungen zu bestimmenden Parameter).

Man nennt die Schwingungen ω_1 und ω_2 des gekoppelten Systems auch **Normalschwingungen** und die Koordinaten ξ^\pm die **Normalkoordinaten**.

In diesem Beispiel haben die Normalkoordinaten folgende Bedeutung:

$\xi^+ = (x_1 + x_2)/2$ ist der Mittelwert der gesuchten Auslenkungen und

$\xi^- = (x_1 - x_2)/2$ der halbe Relativabstand der Auslenkungen.

(Die Normalschwingungen haben für gekoppelte Systeme eine große Bedeutung, wie im Kap. 5.5 noch genauer gezeigt werden wird.)

Durch Rücktransformation auf $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$, erhält man die gesuchten Lösungen des gekoppelten Gleichungssystems (a).

Für gleiche Amplituden $A_1 = A_2 = A$ ergibt sich für $x_1(t)$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (\xi^+ + \xi^-) = A \left\{ \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \right\} = \\ &= 2A \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \end{aligned} \quad \text{(b)}$$

und für $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= (\xi^+ - \xi^-) = A \left\{ \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \right\} = \\ &= -2A \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \end{aligned} \quad \text{(c)}$$

Wobei der folgende trigonometrischen Sätze angewendet wurden:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

und

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

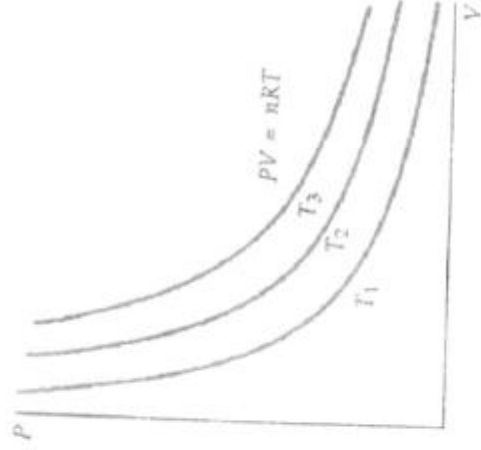


Abb. 39

Die p - V -Isothermen idealer Gase sind Hyperbeln, die der Beziehung $pV = nRT$ folgen. Sie sind hier für drei verschiedene Temperaturen gezeichnet, wobei $T_3 > T_2 > T_1$ ist.

3.5 Die molekulare Deutung der Temperatur, die kinetische Gastheorie

Bisher wurde das Verhalten der Gase mit Hilfe der makroskopischen Variablen p , V und T beschrieben. Wollte man den mikroskopischen Zustand eines Gases charakterisieren, so müßte man die Koordinaten und Geschwindigkeiten aller Teilchen angeben, was in Anbetracht der Teilchenzahl eine völlig unlösbare Aufgabe ist.

Nach der kinetischen Gastheorie rührt der Druck eines Gases von den Stößen seiner Teilchen auf die Behälterwand her. Diesen Druck errechnet man aus der Impulsänderung pro Zeiteinheit bei den Stößen der Gasmoleküle auf die Wände. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Kraft, die die Wand beim Stoß auf die Moleküle ausübt:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

Das dritte Newtonsche Gesetz besagt, daß diese Kraft F den gleichen Betrag wie die Kraft hat, die die Moleküle beim Stoß auf die Wand ausüben. Ferner ist die Kraft, die pro Flächeneinheit auf die Wand wirkt, gleich dem Druck p .

Man geht nun von folgenden Annahmen aus:

1. Das Gas besteht aus einer großen Anzahl von Molekülen, die elastisch aufeinander und auf die Wände stoßen.
2. Die Moleküle haben im Mittel einen Abstand voneinander, der groß gegen ihren Durchmesser ist. Außerdem üben sie - außer bei den Stößen - aufeinander keine Kräfte aus.

Das in Abbildung 32 gezeigte System von zwei gekoppelte Massen hat also zwei Normalschwingungen wobei $\omega_1 < \omega_2$ ist.

Allgemein gilt:

Die Transformation auf Normalschwingungskoodinaten ξ erlauben also die Darstellung von gekoppelten Schwingungen als Überlagerung von harmonischen Schwingungen.

In Abbildung 33 (unten) sind die beiden Normalschwingungen dargestellt, die, wenn man sie additiv bzw. subtraktiv überlagert (Gleichungen (b) bzw. (c)), die darüber dargestellten Schwebungen ergeben.

Gekoppelte Oszillatoren lassen sich mit verschiedenen Anordnungen demonstrieren.

Ein wichtiges Beispiel für gekoppelte Schwingungen eines System, bei dem die Massen nicht nur entlang einer Geraden schwingen, bieten die Schwingungen mehratomiger Moleküle, die ebenfalls als Linearkombination des atomaren Gerüstes dargestellt werden können.

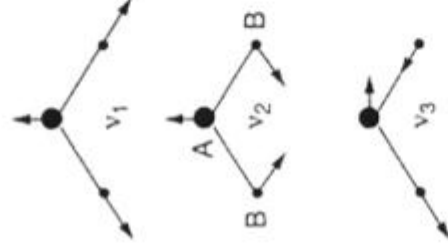


Abb. 34 Die drei Normalschwingungen eines nichtlinearen, zweidimensionalen dreiatomigen Moleküls AB_2

Allgemein gilt:

Die Anzahl der Normalschwingungen eines dreidimensionalen Systems (z. B. Moleküls) ist abhängig von der Anzahl der Teilchen (Atome) N aus denen das System besteht. Die Anzahl der Normalschwingungen ist dann gegeben durch $3N-6$.

$$\gamma = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}$$

Die meisten Substanzen dehnen sich beim Erwärmen aus. Eine wichtige Ausnahme ist das Wasser, dessen Volumen zwischen 0°C und 4°C bei steigender Temperatur abnimmt (Anomalie des Wassers).

Diese Eigenschaft hat wichtige Auswirkungen auf das Leben dieser Erde. Oberhalb von 4°C nimmt bei Abkühlung die Dichte des Wassers zu und es sinkt nach unten. Aber unterhalb von 4°C wird die Dichte bei Abkühlung kleiner und das Wasser steigt nach oben. Dadurch bildet sich bei Frost das Eis zuerst auf der Oberfläche eines Gewässers und bleibt dort, weil es eine geringere Dichte als die Flüssigkeit hat. So kann die Eisschicht als Isolierung für das Wasser darunter wirken. Die größte Dichte hat das Wasser bei 4°C, daher herrscht am Boden des Gewässers diese Temperatur vor.

3.4 Zustandsgleichung für ideale Gase

Komprimiert man ein Gas bei konstanter Temperatur, so steigt der Druck, während das Volumen abnimmt. Beim Expandieren, ebenfalls bei gleichbleibender Temperatur, sinkt der Druck während der Volumenzunahme. In guter Näherung ist der Druck umgekehrt proportional zum Volumen. Mit anderen Worten: *Das Produkt aus Druck und Volumen ist bei unveränderter Temperatur konstant.*

Dieser Sachverhalt wurde 1662 erst von Robert Boyle und unabhängig davon 1676 von Edme Mariotte entdeckt. Das eben beschriebene Verhalten der Gase wird als *Gesetz von Boyle-Mariotte* bezeichnet.

$pV = \text{konstant}$ bei konstanter Temperatur.

Diese Beziehung gilt in guter Näherung für alle Gase bei geringer Dichte. Andererseits ist die absolute Temperatur eines Gases bei geringer Dichte proportional zum Druck bei konstantem Volumen. Also ist wegen des Boyle-Mariotteschen Gesetzes *die absolute Temperatur proportional zum Volumen eines Gases, wenn der Druck konstant ist.*

Diese Gesetzmäßigkeit wurde von Joseph Louis Gay-Lussac (1778-1850) gefunden und ist daher bekannt als *Gesetz von Gay-Lussac*. Insgesamt ist das Produkt aus Druck und Volumen proportional zur absoluten Temperatur T :

$$pV = CT$$

Darin ist C eine Proportionalitätskonstante, die von der vorliegenden Gasmenge abhängt.

Man stelle sich zwei gleiche Volumina vor, die mit gleichen Mengen desselben Gases bei gleicher Temperatur gefüllt sind. Jedes Gas habe ein Volumen, das der obigen Gleichung gehorcht. Fügt man beide Behälter zusammen, erhält man das doppelte Gasvolumen bei gleichem Druck p und gleicher Temperatur T . Aus der Gleichung folgt nun, daß C doppelt so groß sein muß. Somit ist C proportional zur Gasmenge und man schreibt

$$C = kN$$

Hier ist N die Anzahl der Gasmoleküle und k eine weitere Konstante. Man kann nun obige Gleichung auch so schreiben:

Oft findet man in der Literatur auch die komplexe Schreibweise für eine Welle:

$$x(z, t) = C e^{i(\omega t - kz)}$$

mit der komplexen Amplitude C .

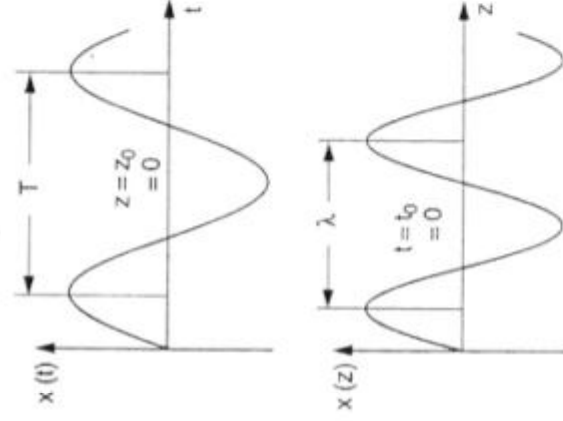


Abb. 35 Darstellung einer harmonischen Welle a) als ortsfeste Schwingung $x(z_0, t)$ für $z_0 = 0$, b) als räumlich periodische Funktion $x(z, t_0)$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

5.5.1 Verallgemeinerung des Wellenbegriffes

Eine Verallgemeinerung des Wellenbegriffes entsteht, indem man die Richtung der Auslenkung, und auch die der Ausbreitungsrichtung der Welle in jede beliebige Raumrichtung zulässt. Dazu ist es notwendig, die Ausbreitungsrichtung und auch die Amplitude (Auslenkung) als vektorielle Größen einzuführen. Im folgendem wird das griechische ξ („Xi“) für den Auslenkungsvektor verwendet.

5.5.1.1 Ebene Wellen in z – Richtung

Bedeutet die Größe ξ eine mechanische Auslenkung von Teilchen eines Mediums aus ihrer Gleichgewichtslage, so kann diese Auslenkung entweder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle ($= z$ - Richtung), d.h. in der (x, y) - Ebene oder in Ausbreitungsrichtung der Welle erfolgen. Im ersten Fall spricht man von einer **Transversalwelle**, im zweiten Fall von einer **Longitudinalwelle**.

Die entsprechende Gleichung für die **Transversalwelle** lautet:

$$\vec{\xi}(z, t) = A(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \sin(\omega t - kz)$$

Nach der obigen Gleichung hängt der Gasdruck p_t linear von der Temperatur t_C ab. In der Abbildung ist der Druck gegen die Temperatur (bei konstantem Volumen im Gasthermometer) aufgetragen. Die extrapolierte Gerade schneidet die t-Achse stets bei $-273,15^\circ\text{C}$, unabhängig von der Art des Gases.

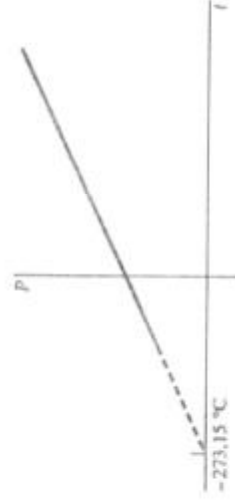


Abb. 38
Druck-Temperatur-Diagramm für ein Gasthermometer konstanten Volumens. Bei der Extrapolation auf den Druck Null schneidet die Gerade die Temperaturachse bei $-273,15^\circ\text{C}$.

Allerdings weicht der experimentell ermittelte Wert davon zuweilen ab, weil es schwierig ist, den Gefrierpunkt und den Siedepunkt des Wassers an verschiedenen Orten absolut präzise zu reproduzieren. Vor allem der Siedepunkt ändert sich mit dem äußeren Luftdruck, der seinerseits von der Höhenlage des Ortes und vom Wetter abhängt.

Um dieses Problem zu umgehen, wurde im Jahr 1954 vom Internationalen Komitee für Maß und Gewicht eine Temperaturskala eingeführt, die nur auf einem einzigen Fixpunkt beruht. Ein Bezugspunkt, der wesentlich genauer reproduzierbar ist als der Schmelz- und Siedepunkt des Wassers, ist sein Tripelpunkt. Bei diesem stehen Wasserdampf, flüssiges Wasser und Eis miteinander im Gleichgewicht. Am Tripelpunkt des Wassers herrscht ein Druck von $6,105\text{ mbar}$ und eine Temperatur von exakt $0,01^\circ\text{C}$. Auch die Temperaturskala idealer Gase bezieht sich auf diesen Referenzpunkt: Sie ist so definiert, daß die Temperatur des Tripelpunktes $0,01^\circ\text{C} = 273,16\text{ K}$ beträgt.

Die Einheit K (Kelvin) ist ebenso groß wie die Einheit $^\circ\text{C}$, und der Nullpunkt der Kelvin-Skala liegt bei $-273,15^\circ\text{C}$. Temperaturen in Kelvin werden mit T bezeichnet.

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

5.5.1.5 Stehende Welle, Eigenschwingungen

Die Gleichung

$$x(z, t) = A \sin(\omega t - kz)$$

beschreibt eine Welle in einem unendlich ausgedehnten Medium. Ist das Medium in dem sich eine Welle ausbreitet von endlicher Länge, so kommt es an der Mediumgrenze zur **Reflexion der Wellenbewegung**, wobei es von der Beschaffenheit des Mediumendes abhängt, ob bei der Reflexion ein **Phasensprung** um $\lambda/2$ (bei festem Ende) auftritt oder die Reflexion ohne Phasensprung (bei freiem Ende) erfolgt.

Die Überlagerung der hin- und rücklaufenden (reflektierten) Wellen ergibt eine **stehende Welle**, wenn die Wellenlänge und die Länge des Systems in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen (siehe unten). Die rücklaufende Welle überlagert sich dabei mit der hinlaufenden so, daß an festen Orten und zwar in Abständen von $\lambda/2$ Nullpunkte der Auslenkung auftreten. Für die Wellengleichung der stehenden Welle ergibt sich somit:

$$x(z, t) = A \cdot \sin(\omega t - kz) + A \cdot \sin(\omega t + kz)$$

durch Anwendung von

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

folgt für die **Gleichung der stehenden Welle**:

$$x(z, t) = 2A \cdot \cos(-kz) \cdot \sin \omega t$$

Die Amplitude für einen bestimmten Ort z ist gegeben durch $2A \cdot \cos(-kz)$, die Auslenkung ändert sich zeitlich mit der Kreisfrequenz ω . In der folgenden Abbildung wird der Unterschied zwischen einer fortschreitenden und einer stehenden Welle dargestellt.

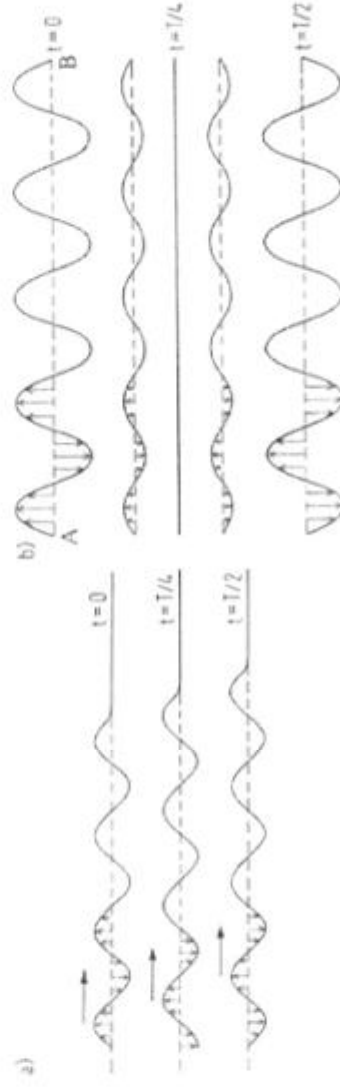


Abb. 36a,b Fortschreitende und stehende Welle in einem Medium mit kontinuierlicher Massenbelegung (z.B. Gummischlauch). a) Fortschreitende Welle im Zeitabstand $t=0$, $T/4$, und $T/2$, b) Stehende Welle zum Zeitpunkt: $t=0$, $0 < t < T/4$, $t=T/4$, $T/4 < t < T/2$, $t=T/2$. Bei $t=0$, $T/2$, in b) liegt die Gesamtenergie nur als potentielle Energie vor, bei $t=T/4$ nur als kinetische Energie.

3. Thermodynamik

3.1 Temperaturskalen

Thermodynamik befaßt sich mit Temperatur, Wärme und Umwandlung von Energie. Außerdem ermöglicht die Thermodynamik eine Aussage darüber, wie die Vorgänge (Änderungen des Zustandes) in einem System ablaufen.

Der Begriff Temperatur ist vertraut im Zusammenhang, wie warm oder wie kalt ein Körper ist. Genauer ist sie ein Maß für die mittlere kinetische Energie der Moleküle im betreffenden Körper. Wird ein Körper erwärmt oder abgekühlt, dann ändern sich einige seiner physikalischen Eigenschaften, unter anderem auch sein Volumen: die meisten Körper dehnen sich bei steigender Temperatur aus. Dies gilt auch für Gase, wenn man ihnen genügend Raum zum Ausdehnen bietet. Hält man aber das Volumen konstant, so steigt ihr Druck. Bei Metallen nimmt beim Erwärmen der elektrische Widerstand zu. Eine physikalische Eigenschaft, die sich mit der Temperatur ändert, und die sich damit zur Temperaturmessung eignet, nennt man eine thermometrische Eigenschaft. Die Änderung ist somit ein Indiz dafür, daß der Körper nun eine andere Temperatur hat.

Bringt man zum Beispiel einen heißen Kupferstab in engen Kontakt mit einem kalten Eisenstab, so wird der Kupferstab etwas kürzer werden und der Eisenstab wird sich ein wenig ausdehnen. Man sagt dann, die beiden Stäbe stehen in thermischen Kontakt miteinander. Nach einiger Zeit läßt sich keine Längenänderung mehr feststellen. Nun befinden sich beide Stäbe im thermischen Gleichgewicht.

Legt man den heißen Kupferstab zum Beispiel in einen großen Behälter mit Wasser, so wird sich auch hier ein thermisches Gleichgewicht einstellen, wenn sich auch das Wasser aufgrund seiner viel größeren Masse nur gering erwärmen wird. Bringt man nun an einer entfernten Stelle noch den kalten Eisenstab dazu, so wird auch dieser nach einer Weile erwärmt worden sein und sich ebenfalls mit dem Wasser im thermischen Gleichgewicht befinden. Das Entscheidende bei diesem Experiment aber ist, daß sich der Kupferstab und der Eisenstab im thermischen Gleichgewicht befinden. Dies kann man auch so formulieren:

Befinden sich zwei Körper in thermischem Gleichgewicht mit einem dritten, so stehen sie auch untereinander in thermischem Gleichgewicht.

Diese Aussage wird oft als **der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik** bezeichnet. Mit seiner Hilfe kann man eine Temperaturskala definieren, indem man sagt, daß zwei in thermischem Gleichgewicht befindliche Körper die gleiche Temperatur haben.

Zur Konstruktion von Thermometern kann man im Prinzip jede temperaturabhängige Eigenschaft nutzen. Ein gewöhnliches Quecksilberthermometer besteht beispielsweise aus einem Glaskolben, an den eine enge Kapillare angesetzt ist. In dieser Anordnung befindet sich Quecksilber, das in der Kapillare hochsteigt, wenn der Kolben wärmer wird.

Entscheidend dabei ist, daß sich Quecksilber stärker ausdehnt als Glas. Die Fixpunkte für zwei bestimmte Temperaturen können mit Hilfe von Eis und Wasser festgelegt werden. Dazu wird das Thermometer zunächst in Wasser gehängt, das bei einem Druck von einer Atmosphäre mit Eis im Gleichgewicht steht. Ist das Thermometer im thermischen Gleichgewicht mit dem Eiswasser, bringt man an der Kapillare eine Markierung an, die den sogenannten Eispunkt bzw. den Gefrierpunkt des Wassers angibt.

5.5.2 Differentialgleichung einer Welle

Da die Beschreibung einer Welle durch Funktionen von zumindest zwei Variablen (z. B. $x = x(z, t)$ siehe oben) erfolgt, ist die entsprechende Differentialgleichung eine **partielle Differentialgleichung**.

Die allgemeine Form der Differentialgleichung für Wellen beliebiger Art (auch oft Wellengleichung genannt) lautet:

$$\Delta \xi = \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

wobei $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ der **Laplace Operator** (in kartesischen Koordinaten) und v_{ph} die Phasengeschwindigkeit der entsprechenden Welle ist.

6. Physikalische Gesetze in zueinander bewegten Koordinatensystemen

Im folgendem soll die Frage diskutiert werden, welche Gestalt physikalische Gesetze, die Vorgänge in einem Koordinatensystem S beschreiben, in einem dazu gleichförmig geradlinig bewegten Koordinatensystem S' haben. Man spricht in diesem Fall von **Inertialsystemen**.

6.1 Galilei - Transformation

Wir betrachten den vereinfachten Fall, daß die Ursprünge O und O' der beiden Bezug-

systeme zu den Zeiten $t = t' = 0$ zusammenfallen und sich das Bezugssystem S' mit der Geschwindigkeit v in positiver x - Richtung bewegt. Die klassische Beziehung die unter diesen Voraussetzungen folgt ist die sogenannte **Galilei- Transformation**:

$$x' = x - v t, \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$t' = t$$

Die inverse Transformation ist demnach gegeben durch:

$$x = x' + v t, \quad y = y', \quad z = z'$$

$$t = t'$$

Beispiel: Wie lang erscheint ein Stab der Länge $l (= x_2 - x_1)$ der in S ruht einem Beobachter in S' ?

Die Anwendung der Galilei Transformation auf die Koordinaten der Endpunkte des Stabes (x_2 und x_1) ergibt:

Die inverse Transformation lautet:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad y = y' \quad z = z'$$
$$t = \frac{t' + \left(\frac{vx'}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

6.2.1 Relativistische Änderung eines Zeitintervalls

Zur Herleitung dieses Zusammenhangs betrachten wir zwei Ereignisse die im Bezugssystem S' durch den Orts x_0 und die Zeitpunkte t_1 bzw. t_2 gegeben sind. Mit Hilfe obiger Gleichungen finden wir für die Zeiten t_1 und t_2 der Ereignisse im Bezugssystem S :

$$t_1 = \frac{t_1' + \left(\frac{vx_0'}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \left(\frac{vx_0'}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

und damit für das Zeitintervall:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Das Zeitintervall $\Delta t_E = t_2 - t_1$ gemessen im Bezugssystem S' (in dem ein Ereignis stattfindet) nennt man **Eigenzeit**.

Das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ gemessen in irgend einem dazu bewegten Bezugssystem S ist demnach um den Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

größer als die Eigenzeit! Man spricht von **Zeitdilatation**.

6.2.2 Relativistische Änderung der Länge eines Stabes

Eng mit der Zeitdilatation verknüpft ist die Längenkontraktion. Die Länge eines Objekts, gemessen in seinem Ruhesystem, heißt Ruhelänge l_R . In jedem Bezugssystem S , in dem sich das Objekt bewegt, ist die dort gemessene Länge kürzer als die Ruhelänge.

Zum Beweis betrachten wir einen im Bezugssystem S' ruhenden Stab, dessen Enden sich an den Orten x_1 bzw. x_2 befinden. Die Länge des Stabs in diesem Bezugssystem ist die Ruhelänge $l_R = x_2 - x_1$. Im Bezugssystem S ist die Länge des Stabes **definiert** als $l = x_2 - x_1$, wobei x_2 die Position des einen Endes zu einer Zeit t_2 und x_1 die Position des anderen Endes **zu derselben in S gemessenen Zeit** $t_1 = t_2$ ist.

Zur Berechnung von $x_2 - x_1$ zur einer Zeit t verwenden wir

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

sowie

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} .$$

Wegen $t_2 = t_1$ erhält man:

$$x_2 - x_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot (x_2' - x_1')$$

Daraus folgt für die Kontraktion des Stabes mit der Länge l_R :

$$l = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} l_R .$$

D.h., Längen gemessen in irgend einem zu S' bewegten Bezugssystem (z.B. S) sind um den Faktor

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

verkürzt sind! Man spricht von **Längenkontraktion**.

Die Existenz einer endlichen Grenzgeschwindigkeit, nämlich die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht im Vakuum,

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$

hat zur Folge, daß bei der Addition von Geschwindigkeiten v_1 und v_2 diese Grenzgeschwindigkeit c **nie überschritten werden kann**.

Diese Tatsache führt zum Einstein'schen Geschwindigkeitsadditionsgesetz:

$$v_{ges} = c \frac{v_1/c + v_2/c}{1 + (v_1 v_2)/c^2}$$

Man beachte, daß für den Fall v_1 oder v_2 gleich der Lichtgeschwindigkeit:

$$v_{ges} = c$$

folgt!

Die Lorentztransformation kann auch so verstanden werden, daß die Lichtgeschwindigkeit c im materiefreien Raum in jeder Richtung relativ zu jedem geradlinigen, gleichförmig bewegten Bezugssystem denselben Betrag hat. Die Grenzgeschwindigkeit gilt für die Bewegung eines materiellen Körpers, für den Transport von Energie und für die Übertragung einer Information.

$$x_2' = x_2 - vt$$

$$x_1' = x_1 - vt$$

$$t' = t$$

$$\Rightarrow x_2' - x_1' = x_2 - x_1 = l$$

Daraus folgt, daß die Länge des Stabes durch die Relativbewegung nicht verändert wird. Besitzt ein Teilchen die Geschwindigkeit $u_x = dx/dt$ im Bezugssystem S , dann ist seine Geschwindigkeit im mit v bewegten Bezugssystem S' :

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v \Rightarrow u_x' = u_x - v$$

Durch nochmaliges Differenzieren dieser Gleichung sieht man, daß die Beschleunigung eines Teilchens in beiden Bezugssystemen gleich ist:

$$a_x' = \frac{du_x'}{dt'} = \frac{du_x}{dt} = a_x \Rightarrow a_x' = a_x$$

d.h., daß in zueinander gleichförmig, geradlinig bewegten Systemen keine zusätzlichen Trägheitskräfte auftreten.

6.2 Spezielle Relativitätstheorie (Lorentz – Transformation)

Für die Transformationsvorschrift zwischen zwei Inertialsystemen, die sich in x - Richtung relativ zueinander mit $v \leq c$ bewegen gilt die **Lorentz - Transformation**.

Gilt wieder, daß die Ursprünge der beiden Bezugssysteme O und O' zu den Zeiten $t = t' = 0$ zusammenfallen und sich das Bezugssystem S' mit der Geschwindigkeit v in positiver x - Richtung bewegt, so lautet die Lorentz - Transformation :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad y' = y \quad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \left(\frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Thermodynamik

3.	Thermodynamik
3.1	Temperaturskalen
3.2	Absolute Temperatur
3.3	Thermische Ausdehnung, Anomalie des Wassers
3.4	Zustandsgleichung für ideale Gase
3.5	Die molekulare Deutung der Temperatur, die kinetische Gastheorie
3.6	Die Geschwindigkeitsverteilung von Molekülen
3.7	Die Van-der-Waals-Gleichung
3.8	Phasendiagramme
3.9	Wärme
3.10	Wärmekapazität; Spezifische Wärme
3.11	Phasenübergänge
3.12	Wärmeübertragung
3.12.1	Wärmeleitung
3.12.2	Strahlung
3.13	Der erste Hauptsatz
3.13.1	Die innere Energie eines idealen Gases
3.13.2	p-V-Diagramm eines Gases und Volumsarbeit
3.13.3	Wärmekapazitäten und Gleichverteilungssatz
3.14	Adiabatische Zustandsänderung
3.15	Wärmekraftmaschinen und der zweite Hauptsatz
3.16	Kältemaschinen und zweiter Hauptsatz
3.17	Carnot-Wirkungsgrad
3.18	Entropie und Ordnung
3.18.1	Entropie und Wahrscheinlichkeit
3.19	Der dritte Hauptsatz

Man unterscheidet nun drei Fälle abhängig von den Randbedingungen.

1. Zwei feste Enden (Abb.37a)

Passen in die endliche Länge L des Systems, dessen beide Enden fixiert sind, entweder $1/2, 2/2, 3/2, \dots, n/2$ Wellenlängen λ hinein, so ist die reflektierte Welle genau phasengleich zur ursprünglichen Welle und es entsteht eine **Eigenschwingung** des Systems, also eine **stehende Welle**, die der folgenden Beziehung genügt:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{L}{n+1}$$

mit der Laufzahl $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Da $v = \lambda \cdot f$, (mit v der Wellengeschwindigkeit und f der Frequenz) folgt:

$$f_n = \frac{v}{2L}(n+1)$$

Daraus folgt:

Das System mit zwei festen Enden hat daher **unbegrenzt viel, aber diskrete Eigenfrequenzen** n . $n = 0$ wird dabei als **Grundschiwingung** bezeichnet.

2. Zwei freie Enden (Abb.37b)

Wie oben gilt beim System mit zwei freien Enden (kein Phasensprung tritt auf):

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{L}{n+1}$$

$n = 0$ ist wieder die Grundschiwingung. Der Eigenfrequenz f_n entsprechen $n+1$ Knotenpunkte im Abstand $\lambda/2$.

3. Ein festes und ein freies Ende (Abb.37c)

Bei einem System mit einem freien und einem festen Ende, wird die Welle am freien Ende ohne Phasenumkehr reflektiert. Es gilt,

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{L}{2n+1}$$

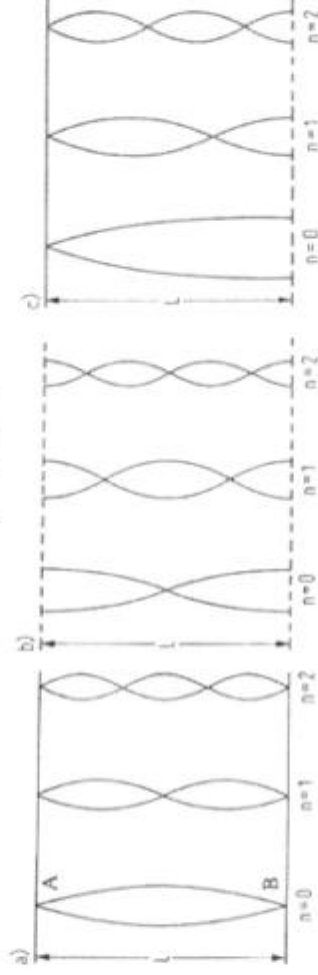


Abb. 37a,b,c Eigenschwingungen eines linearen Gebildes für drei verschiedene Randbedingungen. a) Mit zwei festen Enden b) Mit zwei freien Enden c) Mit einem freien Ende.

Danach wird das Thermometer bei gleichem Druck in siedendes Wasser getaucht. Auch hier wartet man bis die Länge der Quecksilbersäule gleich bleibt und markiert den Siedepunkt des Wassers.

Diese beiden Temperatur-Fixpunkte werden zur Definition der *Celsius-Skala* verwendet, bei der das Temperaturintervall zwischen Gefrierpunkt (0°C) und dem Siedepunkt (100°C) in 100 gleiche Teile unterteilt ist.

3.2 Absolute Temperatur

Quecksilberthermometer finden vielfältige Verwendung. Wurden sie mit Eis und siedendem Wasser kalibriert, so stimmen sie bei 0°C und 100°C überein. Für andere Temperaturen gilt das aber nur, wenn sich die Wärmeausdehnung von Quecksilber und Glas linear mit der Temperatur ändert, was jedoch in der Regel nicht der Fall ist. Die Abweichungen werden umso größer, je weiter die Temperatur unter 0°C bzw. über 100°C liegt. Außerdem erstarrt das Quecksilber bei -39°C und siedet bei 357°C .

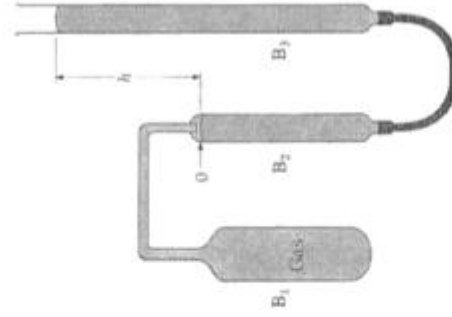


Abb. 37

Ein Gasthermometer mit konstantem Volumen. Gefäß B_1 ist mit einem Gas gefüllt. In den durch einen beweglichen Schlauch verbundenen Gefäßen B_2 und B_3 befindet sich Quecksilber. Das Volumen im Gefäß B_1 wird durch Anheben oder Absenken des Gefäßes B_3 konstant gehalten, so daß das Quecksilber im Gefäß B_2 stets auf gleicher Höhe (an der Nullmarke) bleibt. Die Temperatur ist proportional zum Druck im Gefäß B_1 , der durch die Höhe h der Quecksilbersäule im Gefäß B_3 angezeigt wird.

Es gibt aber Thermometer, die auch dann recht gut übereinstimmende Werte liefern, wenn die Temperatur stark von der Temperatur der Kalibrierungspunkte abweicht. Man verwendet dazu Gasthermometer. Dabei wird z. B. das Volumen konstant gehalten und der Druck als thermometrische Eigenschaft ausgenutzt. Auch hier kalibriert man das Thermometer, indem der Gasdruck beim Gefrierpunkt und beim Siedepunkt des Wassers ermittelt und dann das zugehörige Höhenintervall im Gefäß in 100 gleiche Teile unterteilt wird.

Im Gasthermometer mit konstantem Volumen herrsche der Druck p_0 bei 0°C und der Druck p_{100} bei 100°C . Der bei der Temperatur t_C gemessene Druck ist p_t und es gilt:

$$t_C = \frac{p_t - p_0}{p_{100} - p_0} \cdot 100^\circ\text{C}$$

Aus Versuchen weiß man, daß die mit Gasthermometern gemessenen Werte dann recht ähnlich werden, wenn die Gasdichte klein ist. Extrapoliert man auf die Gasdichte Null, dann liefern diese Thermometer mit verschiedenen Gasen genau den selben Wert. Weil diese Art der Temperaturmessung demnach nicht von den Eigenschaften einer bestimmten Substanz abhängt, kann mit Hilfe von Gasthermometern geringer Gasdichte eine Temperaturskala definiert werden.

und nur die **Longitudinalwelle**:

$$\vec{\xi}(z, t) = A\vec{e}_z \sin(\omega t - kz)$$

(A ist der Betrag der Amplitude und $\vec{e}_i (i = x, y, z)$ der Einheitsvektor, der die Richtung der Auslenkung angibt).

Liegt bei der Transversalwelle der Amplitudenvektor $A(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ (und damit $\vec{\xi}$) in einer vorgegebenen $\{(\vec{e}_x + \vec{e}_y), \vec{e}_z\}$ -Ebene (wobei sich die Welle selbst in z -Richtung ausbreitet), dann nennt man die Welle **linear polarisiert**.

Beschreibt dagegen der Amplitudenvektor einen Kreis (Ellipse) in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung z , dann nennt man die Welle **zirkular (elliptisch) polarisiert**.

5.5.1.2 Ebene Wellen mit beliebiger Ausbreitungsrichtung

Breitet sich eine Welle in eine beliebige Raumrichtung aus, so beschreibt man deren **Ausbreitungsrichtung durch den Wellenvektor \vec{k}** , dessen Betrag $|\vec{k}|$ der Wellenzahl ($k=2\pi/\lambda$) entspricht.

Die Wellengleichung einer ebenen **harmonischen Welle** ist also gegeben durch:

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{A} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Für eine ebene Welle muß $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.}$ gelten.

Eine komplexe Schreibweise der ebenen Welle ist:

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{A} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

5.5.1.3 Allgemeine Wellenformen

Die allgemeine Darstellung einer beliebigen Welle (nicht notwendigerweise sinusförmig, die Welle kann auch aus einem einzigen Puls bestehen), die sich in eine beliebige Raumrichtung ausbreitet, ist durch die Funktion

$$\vec{\xi} = \vec{A} f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

gegeben, wobei $f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ eine beliebige Funktion der Variablen $(\omega, t, \vec{k}, \vec{r})$ sein kann.

5.5.1.4 Kugelwelle

Eine wichtige Wellenform ist die Kugelwelle.

Wenn eine Kugelwelle in $r=0$ erregt wird, hat sie die folgende Darstellung:

$$\vec{\xi}(r, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr)$$

oder in der komplexen Schreibweise:

Die derzeit gültige Internationale Temperaturskala aus dem Jahr 1990 stützt sich nicht allein auf den Tripelpunkt des Wassers, sondern auf insgesamt 17 gut reproduzierbare Bezugspunkte.

Gleichgewichtszustand	T/K
Dampfdruck des Heliums	3 bis 5
Tripelpunkt des Wasserstoffs	13,8033
Dampfdruck (32,9 kPa) des Wasserstoffs	17
Dampfdruck (102,2 kPa) des Wasserstoffs	20,3
Tripelpunkt des Neons	24,5561
Tripelpunkt des Sauerstoffs	54,3584
Tripelpunkt des Argons	83,8058
Tripelpunkt des Quecksilbers	234,3156
Tripelpunkt des Wassers	273,16
Schmelzpunkt des Galliums	302,9146
Erstarrungspunkt des Indiums	429,7485
Erstarrungspunkt des Zinns	505,078
Erstarrungspunkt des Zinks	692,677
Erstarrungspunkt des Aluminiums	933,473
Erstarrungspunkt des Silbers	1234,93
Erstarrungspunkt des Goldes	1337,33
Erstarrungspunkt des Kupfers	1357,77

3.3 Thermische Ausdehnung, Anomalie des Wassers

Wird ein Körper erwärmt, so dehnt er sich im allgemeinen aus. Man betrachtet einen Stab der Länge l mit der Temperatur T . Ändert sich diese um ΔT , dann ist die Längenänderung proportional zu ΔT und zur ursprünglichen Länge l :

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

Die Proportionalitätskonstante α heißt Längenausdehnungskoeffizient oder *linearer Ausdehnungskoeffizient*. Also

$$\alpha = \frac{\Delta l / l}{\Delta T}$$

α von Flüssigkeiten oder Festkörpern hängt in der Regel nicht stark vom Druck ab, meist aber von der Temperatur. Der Wert von α bei einer bestimmten Temperatur T wird durch den Grenzübergang für $\Delta T \rightarrow 0$ erhalten:

$$\alpha = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta l / l}{\Delta T} = \frac{1}{l} \frac{dl}{dT}$$

Der Volumenausdehnungskoeffizient γ (auch kubischer Ausdehnungskoeffizient) ist analog definiert, nämlich als Quotient aus relativer Volumenänderung und Temperaturdifferenz bei konstantem Druck:

5.5 Mechanische Wellen

In einem System gekoppelter Massenpunkten, wird sich eine Störung, die auf einen dieser Massenpunkte wirkt, auf alle anderen Massen übertragen. Ein besonders wichtiger und interessanter Fall liegt vor, wenn eine periodische (z. B. sinusförmige) Störung wirkt. Nach einer gewissen zeitlichen Verzögerung, wird durch die Kopplung jeder Massenpunkt eine Schwingung um seine Ruhelage ausführen. Eine solche räumliche Ausbreitung von Schwingungen nennt man eine **harmonische Welle**.

Beispiele für mechanische Wellen sind Wasserwellen, Schallwellen oder Druckwellen in festen, flüssigen oder gasförmigen Medien.

Im Gegensatz zur Schwingung bei der die Auslenkung nur eine Funktion der Zeit ist, muß bei der Welle auch die räumliche Abhängigkeit der Auslenkung berücksichtigt werden.

Die Wellengleichung lautet daher:

$$x(z,t) = A \sin(\omega t - kz)$$

wobei, ω t die Zeitabhängigkeit und kz die Ortsabhängigkeit beschreibt. Durch $x(z,t)$ wird eine in $(+z)$ - Richtung fortschreitende Welle mit der Auslenkung in die x - Richtung beschrieben. Die **Winkelgeschwindigkeit** ω und die **Wellenzahl** k hängen mit der Periodendauer T bzw. der Wellenlänge λ folgendermaßen zusammen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Durch ω und k ist die **Phasengeschwindigkeit** v_{ph} gegeben als (**Dispersionsrelation**):

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

Die Phasengeschwindigkeit beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich ein bestimmter Wert der Auslenkung in $(+z)$ -Richtung ausbreitet. Der Betrag von v_{ph} wird durch die Stärke der Kopplung und der Masse (bei diskreter Massenverteilung) bestimmt, bei Wellen mit homogenen Massenverteilung von der Massendichte.

Da es sich bei der Funktion $x(z,t)$ um eine Funktion von zwei Veränderlichen handelt, ist eine Darstellung in einem zweidimensionalen Schaubild nicht möglich, man wählt daher meist eine Darstellung in zwei getrennten Schaubildern: $x(z_0, t)$ und $x(z, t_0)$ (Abb. 35).

Äquivalent Schreibweisen für Wellen die in $+z$ - Richtung laufen sind:

$$\begin{aligned} x(z,t) &= A \sin(\omega t - kz) = \\ &= A \sin \left\{ \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right\} \\ &= A \sin \{ 2\pi (vt - z / \lambda) \} \end{aligned}$$

$$pV = nKT$$

Die Größe k heißt Boltzmann-Konstante. Aus dem Experiment geht hervor, daß sie für alle Gase den selben Wert hat:

$$k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J / K}$$

Oft ist es günstiger, die Gasmenge als Anzahl der Mole anzugeben.

Ein Mol einer Substanz enthält so viele Teilchen, wie die Avogadro-Zahl N_A angibt. Das ist die Anzahl der Atome in genau 12g des Kohlenstoff-Isotops ^{12}C .
Der Wert der Avogadro-Zahl ist

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Liegen n Mole einer Substanz vor, dann enthält sie folgende Anzahl an Molekülen (bzw. Atomen):

$$N = nN_A$$

Somit lautet die obige Gleichung

$$pV = nN_A kT = nRT$$

mit

$$R = kN_A$$

Die Größe R ist die *Gaskonstante*. Sie hat für alle Gase den Wert:

$$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 0,08206 \text{ dm}^3 \cdot \text{atm} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Man spricht daher von einem *idealen Gas*, wenn pV/nT für alle Drücke konstant ist. Dann gilt für den Zusammenhang von Druck, Temperatur und Volumen die Zustandsgleichung für ideale Gase, das *ideale Gasgesetz*.

$$pV = nRT$$

Die Masse eines Mols einer Substanz nennt man molare Masse M . Die Masse von n Molen eines Gases ist

$$m = nM$$

Für die Dichte ρ eines idealen Gases gilt

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V}$$

mit $n/V = p/RT$ folgt

$$\rho = \frac{M}{RT} p$$

Bei einer festen Temperatur ist also die Dichte eines idealen Gases proportional zum Druck.

In der Gleichung für ein ideales Gas werden p , V und T für eine gegebene Gasmenge n miteinander verknüpft. Eine solche Beziehung nennt man *Zustandsgleichung*. Der Zustand einer gegebenen Gasmenge wird durch zwei der drei genannten Variablen festgelegt. Kennt man beispielsweise p und V , dann ist die Temperatur T durch eine Funktion $T(p, V)$ bestimmt. In Abb. 39 ist der Druck gegen das Volumen bei verschiedenen Temperaturen aufgetragen. Da jede Kurve für eine konstante Temperatur gilt, spricht man von Isothermen. Bei den idealen Gasen sind dies Hyperbeln, da der Druck umgekehrt proportional zum Volumen ist.

Die Gleichungen (b) und (c) beschreiben die in Abbildung 33 (oben) dargestellten **Schwebungen** ($x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$), die die Massenpunkte m_1 und m_2 der Anordnung in Abbildung 32 abwechselnd ausführen.

Für die Schwebungsdauer T ergibt sich:

$$T = \frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

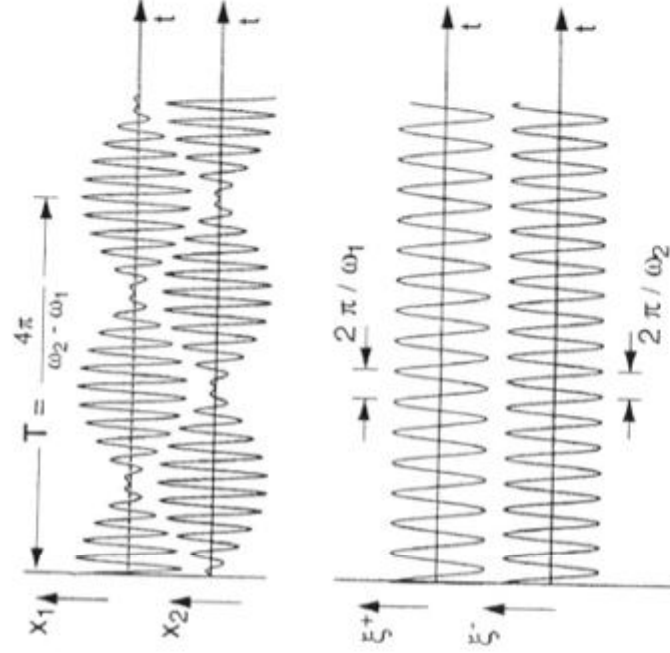


Abb. 33 Zeitabhängigkeit von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ und die der dazugehörigen Normalmoden $\xi^+(t)$ und $\xi^-(t)$ dargestellt.

Unter speziellen Anfangsbedingungen lassen sich die Normalmoden direkt anregen. Um ξ^+ anzuregen müssen beide Pendel genau in Phase schwingen ($x_1(t) = x_2(t)$), (die beiden Massenpunkte schwingen gleichzeitig nach rechts und dann nach links).

Aus den Gleichungen (b) und (c) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \xi^- = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \quad \text{und} \quad A_1 = A_2 &\Rightarrow \\ x_1(t) = x_2(t) = \xi^+ = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) \end{aligned}$$

Schwingen beide Pendel genau gegenphasig, d.h. ($x_1(t) = -x_2(t)$) so folgt aus den Gleichungen (b) und (c):

$$\begin{aligned} \xi^+ = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \quad \text{und} \quad A_1 = -A_2 &\Rightarrow \\ x_1(t) = -x_2(t) = \xi^-(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi) \end{aligned}$$

3. Für die Moleküle gibt es weder eine bevorzugte Position im Behälter, noch eine bevorzugte Richtung ihrer Geschwindigkeit, wenn keine äußeren Kräfte wirksam sind: Die Gravitation wird vernachlässigt.

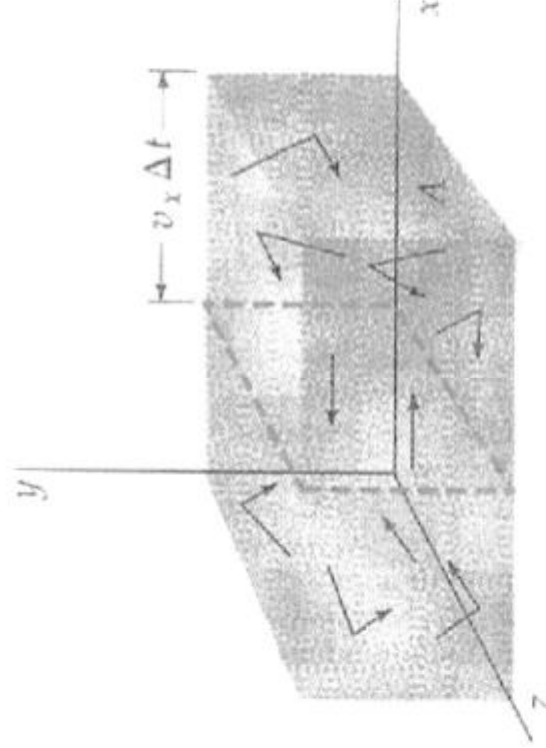


Abb. 40

Gasmoleküle in einem quaderförmigen Behälter. Im Zeitintervall Δt treffen die Moleküle, die sich nach rechts bewegen und höchstens den Abstand $v_x \Delta t$ von der rechten Wand haben, auf diese auf. Die Anzahl der Moleküle innerhalb dieses Abstandes ist proportional zu v_x und zur Anzahl der Moleküle pro Volumen.

Damit läßt sich ein Gas, als ideales Gas beschreiben. Es befinden sich nun N Gasteilchen in einem quaderförmigen Behälter mit dem Volumen V . Jedes von ihnen habe die Masse m und bewege sich mit der Geschwindigkeit v .

Man berechnet zunächst die Kraft, die die Gasteilchen auf die rechte Wand senkrecht zur x -Achse ausüben. Die Impulskomponente eines Moleküls in x -Richtung beträgt $+mv_x$ bevor es die Wand trifft und $-mv_x$ danach. Die Impulsänderung durch den Stoß ist daher $2mv_x$. Die Anzahl der Moleküle, die im Zeitintervall Δt auf die rechte Wand mit der Fläche A treffen, ist gleich der Anzahl der Moleküle, die höchstens den Abstand $v_x \Delta t$ von dieser Wand haben und sich nach rechts bewegen, also gleich der Anzahl pro Volumen N/V multipliziert mit dem Volumen $v_x \Delta t A$, sowie mit $1/2$, denn im Mittel bewegt sich die eine Hälfte der Moleküle nach rechts und die andere nach links. Schließlich ist die gesamte Impulsänderung Δp^* der Gasmoleküle im Zeitintervall Δt gleich der eben berechneten Anzahl multipliziert mit $2mv_x$:

$$\Delta p^* = \frac{1}{2} \frac{N}{V} (v_x \Delta t \cdot A) 2mv_x = \frac{N}{V} m v_x^2 \cdot A \cdot \Delta t$$

Die Kraft, die die Moleküle auf die Wand ausüben (und umgekehrt), ist gleich dieser Impulsänderung, dividiert durch die Zeitspanne Δt . Für den Druck p gilt allgemein ausgedrückt:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta p^*}{\Delta t}$$

setzt man hier Δp^* aus der vorhergehenden Gleichung ein, so erhält man

Sind viele räumlich getrennte Oszillatoren miteinander gekoppelt, so kann sich eine Störung (Schwingung) die an einer Stelle auf dieses System einwirkt, in Form einer Welle ausbreiten. Ohne eine Kopplung zwischen den Oszillatoren gäbe es keine Welle. Den einfachsten Fall stellen zwei gekoppelte Massenpunkte dar, wie sie in Abbildung 32 gezeigt werden.

5.4.1 Gekoppelte Federpendel

Sind die zwei Massenpunkte m_1 und m_2 durch Federn mit den Federkräften D_1 und D_2 an ihre Ruhelagen $x_1=0$ bzw. $x_2=0$ gebunden und außerdem durch eine Feder, mit der Federkonstanten D_{12} , miteinander verbunden, so wird die Dehnung der mittleren Feder von der jeweiligen Position der beiden Massen abhängen.

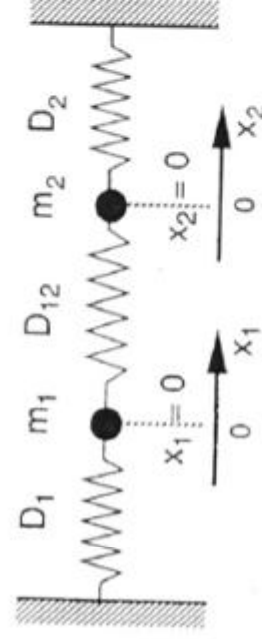


Abb. 32 Zwei gekoppelte Federpendel

Die gezeigte Anordnung wird durch ein System von zwei Differentialgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -D_1 x_1 - D_{12} (x_1 - x_2) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -D_2 x_2 - D_{12} (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (\text{a})$$

Dieses Gleichungssystem stellt ein **gekoppeltes** Differentialgleichungssystem dar, da jede der Gleichungen beide Variablen x_1 und x_2 enthält. Durch eine geeignete Variablentransformation kann dieses gekoppelte System entkoppelt und dadurch lösbar gemacht werden.

Nimmt man in obigem Beispiel vereinfachend an daß: $m_1 = m_2 = m$ und die beiden Federkonstanten: $D_1 = D_2 = D$ gleich sind, dann erhält man durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen (a):

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) &= m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 + x_2) = -D(x_1 + x_2) \\ m \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) &= m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -D(x_1 - x_2) - 2D_{12}(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Mit den neuen Variablen (man bezeichnet sie auch als Koordinaten)

$$\xi^+ = \frac{1}{2}(x_1 + x_2); \quad \xi^- = \frac{1}{2}(x_1 - x_2);$$

3.6 Die Geschwindigkeitsverteilung von Molekülen

Nicht alle Moleküle haben dieselbe Geschwindigkeit. Zur Messung der Verteilung läßt man Gas aus einem Behälter durch ein winziges Loch in eine Vakuumkammer ausströmen. Durch geeignete Detektoren kann man die Anzahl der Moleküle mit verschiedenen Geschwindigkeiten ermitteln. Abb. 41 zeigt die Verteilung $f(v)$ der Molekülgeschwindigkeiten eines Gases bei zwei Temperaturen. Diese Verteilung wird Maxwell-Boltzmann-Verteilung genannt.

Sie ist auf folgende Weise definiert: Ist N die Gesamtzahl aller Moleküle, dann ist die Anzahl dN der Moleküle mit Geschwindigkeiten zwischen v und $(v + dv)$ gegeben durch

$$dN = Nf(v)dv$$

Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung kann mit Methoden der statistischen Mechanik ermittelt werden. Es sei hier aber nur die Lösung angegeben

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}$$

Sie hat ihr Maximum bei der Geschwindigkeit

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

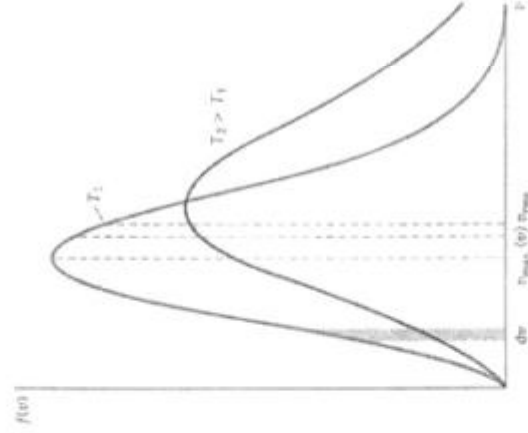


Abb. 41

Die Verteilung der Molekülgeschwindigkeiten eines Gases bei zwei Temperaturen, wobei $T_2 > T_1$ ist. Die Fläche $f(v)dv$ ist gleich dem Anteil der Moleküle, deren Geschwindigkeiten im engen Intervall dv bei der Geschwindigkeit v liegen. Die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ und die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} sind etwas größer als die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_{max} .

Man kann die Geschwindigkeitsverteilung auch durch die Verteilung der kinetischen Energie W ausdrücken. Mit der Energieverteilungsfunktion $f(W)$ ist die Anzahl der Moleküle mit kinetischen Energien zwischen W und $(W + dW)$

$$dN = N \cdot f(W) dW$$

Die kinetische Energie ist $W = \frac{1}{2}mv^2$, folglich ist $dW / dv = mv$, also

$$dW = mv dv$$

und

$$N \cdot f(v) dv = N \cdot f(W) dW$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = K \cos(\omega t).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & [(\omega_0^2 - \omega^2)A_2 \cos \varphi - 2\gamma A_2 \omega \sin \varphi - K] \cos(\omega t) - \\ & - [(\omega_0^2 - \omega^2)A_2 \sin \varphi + 2\gamma A_2 \omega \cos \varphi] \sin(\omega t) = 0 \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für beliebige Zeiten t gelten soll, müssen die beiden Klammerausdrücke identisch Null werden! Daraus erhält man die beiden Gleichungen, aus denen sich A_2 und φ bestimmen lassen:

$$\begin{aligned} & [A_2(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\gamma A_2 \omega \sin \varphi - K] = 0 \\ & [(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\gamma \omega \cos \varphi] = 0 \end{aligned}$$

Woraus für die **Phase** φ folgt:

$$\tan \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Der Winkel φ gibt die Phasendifferenz zwischen der Erregerschwingung und der Schwingung von Feder und Masse an. Er hängt von der Dämpfung γ , der Erregerfrequenz ω und deren Lage zur Eigenfrequenz ω_0 ab. Der Phasenwinkel φ ist negativ, d.h. die erzwungene Schwingung „hinkt“ der Erregerfrequenz nach.

Zur Bestimmung der **Amplitude** A_2 löst man die zweite Gleichung unter Verwendung der ersten Gleichung nach $A_2 \sin \varphi$ und $A_2 \cos \varphi$ auf.

$$\begin{aligned} A_2 \sin \varphi &= -\frac{2\gamma\omega K}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \\ A_2 \cos \varphi &= \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) K}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \end{aligned}$$

Quadrieren und Addieren beider Gleichungen liefert:

$$A_2(\omega) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}.$$

Die Amplitude der erzwungenen Schwingung hängt ab von:

- der Amplitude der äußeren Kraft $K = F_0/m$
- der Dämpfung γ
- der Treiberfrequenz ω und der Eigenfrequenz ω_0 des erregten Systems.
- Für $\gamma = 0$ und $\omega = \omega_0$ folgt $A_2 = \infty$, man spricht in diesem Fall von der **Resonanzkatastrophe**.

3.8 Phasendiagramme

Die verschiedenen physikalischen Zustände, wie fest, flüssig und gasförmig, werden auch als Phasen bezeichnet. Stellt man den Druck einer Substanz in Abhängigkeit von der Temperatur bei konstantem Volumen graphisch dar, so erhält man ein *Phasendiagramm*. Abb. 42 zeigt das Phasendiagramm für Wasser. Die Kurve OC beschreibt die Temperaturabhängigkeit des Dampfdruckes. Beim Erwärmen steigt die Dichte des Dampfes und die der Flüssigkeit nimmt ab, bis beide am kritischen Punkt C ununterscheidbar geworden sind. Bei und oberhalb der kritischen Temperatur (= Temperatur am kritischen Punkt) kann man ein Gas nicht mehr verflüssigen.

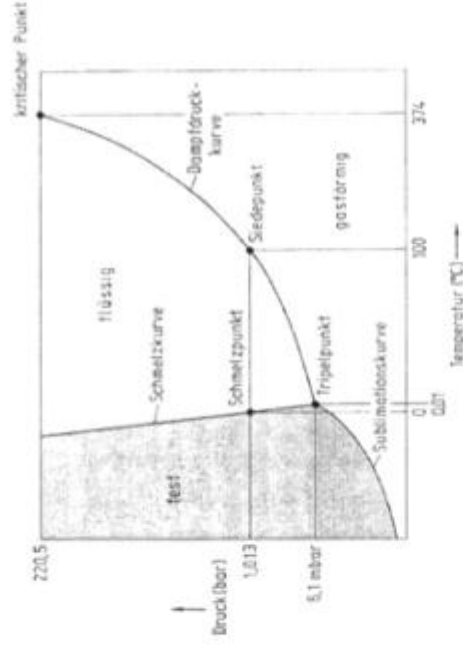


Abb. 42
Das Phasendiagramm von Wasser. Druck und Temperatur sind nicht linear aufgetragen, sondern die Maßstäbe sind in der Nähe des Tripelpunktes zur Verdeutlichung gedehnt. Die drei Phasengrenzlinien sind: Dampfdruckkurve OC, Schmelzkurve OB und Sublimationskurve OA.

Kühlt man nun ab, wird der Dampf kondensieren. Ist der Punkt O erreicht, beginnt das Wasser fest zu werden. Der Punkt heißt Tripelpunkt, weil alle drei Phasen miteinander im Gleichgewicht stehen. Der Tripelpunkt ist für die betreffende Substanz charakteristisch.

Bei Drücken unterhalb des Tripelpunktes kann keine flüssige Phase vorliegen. Also gibt die Kurve OA alle p - T -Wertepaare an, bei der Festkörper und Gas sich im Gleichgewicht befinden.

Die Schmelzkurve OB ist die Grenzlinie zwischen festem und flüssigem Zustand. Sie hat bei Wasser eine negative Steigung, d.h. die Schmelztemperatur nimmt mit steigendem Druck ab, im Gegensatz zu den meisten anderen Stoffen. Dies ist die bereits erwähnte *Anomalie des Wassers*.

3.9 Wärme

Im 17. Jahrhundert entstand die Theorie des Wärmestoffs, die Vorstellung von der Wärme als einen unsichtbaren, flüssigen Wärmestoff, dem Caloricum, dessen Menge stets erhalten bleibt, wenn er auf einen anderen Körper übergeht. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts machte aber Graf Rumford beim Bohren von Kanonenrohren die Beobachtung, daß Wärme keine Substanz sein kann, deren Menge erhalten bleibt, sondern eine Art Bewegung sein muß, die vom Bohrer auf das Kühlwasser übertragen wird. Er konnte zeigen, daß die übertragene Wärmemenge etwa proportional zur mechanischen Arbeit war, die das Bohrwerkzeug verrichtete.

Erst um 1840 aber kam die mechanische Theorie der Wärme auf, nach der die Wärmeübertragung durch eine Temperaturdifferenz hervorgerufen wird. James Joule (1818-1889) führte erstmals recht genaue Messungen durch und bewies, daß das Auftreten oder

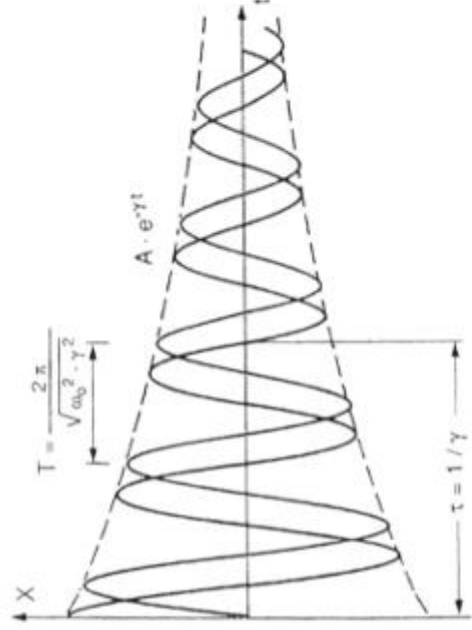


Abb. 29 Gedämpfte Schwingung mit der Dämpfungskonstanten γ und der Schwingungsdauer T für die Anfangsbedingungen $x(t=0) = A$ und $\dot{x}(t=0) = 0$.

Die Kreisfrequenz des gedämpften harmonischen Oszillators wird bei gleicher Federkonstanten D , durch die Dämpfung **verkleinert**, sie ist gegeben durch:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Man unterscheidet drei Fälle:

a) **Schwache Dämpfung** ($\gamma < \omega_0$):
Dieser Bewegungsablauf ist in Abbildung 29 für die Anfangsbedingungen $x(t=0) = A$ und $\dot{x}(t=0) = 0$ gegeben. Die Amplitude der gedämpften Schwingung klingt exponentiell ($A \exp(-\gamma t)$) ab.

b) **Aperiodischer Grenzfall** ($\gamma = \omega_0$):
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung hat dann die folgende Form:

$$x(t) = (c_1 t + c_2) e^{-\gamma t}$$

Mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = A$ und $\dot{x}(t=0) = 0$ nimmt die Auslenkung exponentiell ab. Der Wert $x=0$ (Nulldurchgang) wird erst nach unendlich langer Zeit erreicht. Der aperiodische Grenzfall ist dadurch gekennzeichnet, daß hier zum ersten Mal kein Nulldurchgang erfolgt.

c) **Starke Dämpfung** ($\gamma > \omega_0$):
Dieser Fall wird der **Kriechfall** genannt. Die Schwingung besteht wie der aperiodische Grenzfall in einer einzigen Auslenkung, die für $t \rightarrow \infty$ langsam gegen Null geht.

5.3 Getriebener gedämpfter Oszillator (erzwungene Schwingung)

Wird das obere Ende der Feder nicht starr montiert, sondern durch eine periodische Kraft $F_a = F_0 \cos(\omega t)$ auf und ab bewegt, so wirkt auf die Masse m (durch die Feder übertragen) eine zusätzliche Kraft. Die Differentialgleichung für die erzwungene Schwingung lautet: