1. Übung - Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

Felix Knorr (1325541) - e1325541@student.tuwien.ac.at

22. Oktober 2014

1. Die Ereignisse A, B und C erfüllen die Bedingungen

$$\mathbb{P}(A) = 0.7, \quad \mathbb{P}(B) = 0.6, \quad \mathbb{P}(C) = 0.5,$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = 0.3, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = 0.2,$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.1$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cup C)$, $\mathbb{P}(B \cup C)$ und $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$

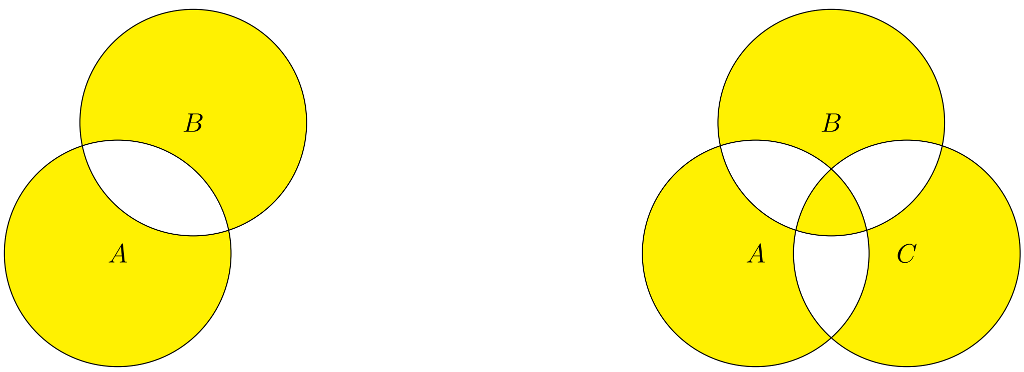
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_i \leq n} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_i})$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.4 = 0.9 \\
\mathbb{P}(A \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) = 0.7 + 0.5 - 0.3 = 0.9 \\
\mathbb{P}(B \cup C) &= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) = 0.6 + 0.5 - 0.2 = 0.9 \\
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&= 0.7 + 0.6 + 0.5 - 0.4 - 0.3 - 0.2 + 0.1 = 1
\end{aligned}$$

2. Die symmetrische Differenz von zwei Mengen ist

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Bestimmen Sie Ausdrücke für $\mathbb{P}(A \triangle B)$ und $\mathbb{P}(A \triangle B \triangle C)$ und raten Sie, wie die Formel für n Mengen aussieht.



(a) Symmetrische Differenz mit zwei Mengen

(b) Symmetrische Differenz mit drei Mengen

Symmetrische Differenz zweier Mengen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \triangle B) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\
\mathbb{P}(A \setminus B) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
\mathbb{P}(B \setminus A) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
\mathbb{P}(A \triangle B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2 \cdot \mathbb{P}(A \cap B)
\end{aligned}$$

Symmetrische Differenz dreier Mengen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \triangle B \triangle C) &= \mathbb{P}(A \setminus (B \cup C)) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cup C)) + \mathbb{P}(C \setminus (A \cup B)) \\
\mathbb{P}(A \setminus (B \cup C)) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
\mathbb{P}(B \setminus (A \cup C)) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
\mathbb{P}(C \setminus (A \cup B)) &= \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
\mathbb{P}(A \triangle B \triangle C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2 \cdot \mathbb{P}(A \cap B) - 2 \cdot \mathbb{P}(A \cap C) - 2 \cdot \mathbb{P}(B \cap C) + 4 \cdot \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

Symmetrische Differenz von n Mengen:

$$\mathbb{P}\left(\mathop{\triangle}_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot 2^i \cdot \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_i \leq n} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_i})$$

3. In einer Urne sind 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen und mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe zurückgelegt (Nach der ersten Ziehung sind also insgesamt 6 Kugeln in der Urne). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel weiß ist und die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel weiß war, wenn die zweite weiß ist.

$$\mathbb{P}(1\text{w}) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(1\text{s}) = \frac{2}{5}, \quad \mathbb{P}(2\text{w} \mid 1\text{w}) = \frac{4}{6}, \quad \mathbb{P}(2\text{w} \mid 1\text{s}) = \frac{3}{6}$$

$\mathbb{P}(2\text{w} \mid 1\text{s})$ bedeutet die zweite Kugel ist weiß, unter der Bedingung, dass die erste Kugel schwarz war,...

$$\mathbb{P}(2\text{w} \mid 1\text{w}) \cdot \mathbb{P}(1\text{w}) = \mathbb{P}(1\text{w} \cap 2\text{w}) \Rightarrow \mathbb{P}(1\text{w} \cap 2\text{w}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30}$$

$$\mathbb{P}(2\text{w} \mid 1\text{s}) \cdot \mathbb{P}(1\text{s}) = \mathbb{P}(1\text{s} \cap 2\text{w}) \Rightarrow \mathbb{P}(1\text{s} \cap 2\text{w}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$$

Diese beiden Wahrscheinlichkeiten sind disjunkt, somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel weiß ist $(1w2w \cup 1s2w)$:

$$\mathbb{P}(2w) = \mathbb{P}(1\text{w} \cap 2\text{w}) + \mathbb{P}(1\text{s} \cap 2\text{w}) = \frac{12}{30} + \frac{6}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

Nun noch die bedingte Wsl, dass erste Kugel weiß, wenn zweite weiß:

$$\mathbb{P}(1\text{w} \mid 2\text{w}) \cdot \mathbb{P}(2\text{w}) = \mathbb{P}(1\text{w} \cap 2\text{w}) \Rightarrow \mathbb{P}(1\text{w} \mid 2\text{w}) \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} \Rightarrow \mathbb{P}(1\text{w} \mid 2\text{w}) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

4. Wie im vorigen Beispiel, nur soll jetzt eine Kugel der entgegengesetzten Farbe mit zurückgelegt werden.

$$\mathbb{P}(1\text{w}) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(1\text{s}) = \frac{2}{5}, \quad \mathbb{P}(2\text{w} \mid 1\text{w}) = \frac{3}{6}, \quad \mathbb{P}(2\text{w} \mid 1\text{s}) = \frac{4}{6}$$

$\mathbb{P}(2\text{w} \mid 1\text{s})$ bedeutet die zweite Kugel ist weiß, unter der Bedingung, dass die erste Kugel schwarz war,...

$$\mathbb{P}(2\text{w} \mid 1\text{w}) \cdot \mathbb{P}(1\text{w}) = \mathbb{P}(1\text{w} \cap 2\text{w}) \Rightarrow \mathbb{P}(1\text{w} \cap 2\text{w}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{30}$$

$$\mathbb{P}(2\text{w} \mid 1\text{s}) \cdot \mathbb{P}(1\text{s}) = \mathbb{P}(1\text{s} \cap 2\text{w}) \Rightarrow \mathbb{P}(1\text{s} \cap 2\text{w}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{30}$$

Diese beiden Wahrscheinlichkeiten sind disjunkt, somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel weiß ist $(1w2w \cup 1s2w)$:

$$\mathbb{P}(2w) = \mathbb{P}(1\text{w} \cap 2\text{w}) + \mathbb{P}(1\text{s} \cap 2\text{w}) = \frac{9}{30} + \frac{8}{30} = \frac{17}{30}$$

Nun noch die bedingte Wsl, dass erste Kugel weiß, wenn zweite weiß:

$$\mathbb{P}(1\text{w} \mid 2\text{w}) \cdot \mathbb{P}(2\text{w}) = \mathbb{P}(1\text{w} \cap 2\text{w}) \Rightarrow \mathbb{P}(1\text{w} \mid 2\text{w}) \cdot \frac{17}{30} = \frac{9}{30} \Rightarrow \mathbb{P}(1\text{w} \mid 2\text{w}) = \frac{9}{17}$$

5. Bestimmen Sie zu Beispiel 1 die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A \setminus B$, $(A \cup B) \setminus C$, $A \triangle B$ und $A \triangle B \triangle C$

$$\begin{aligned}
A \setminus B \quad &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.7 - 0.4 = 0.3 \\
(A \cup B) \setminus C \quad &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= 0.7 + 0.6 - -0.4 - 0.3 - 0.2 + 0.1 = 0.5 \\
A \triangle B \quad &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2 \cdot \mathbb{P}(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 2 \cdot 0.4 = 0.5 \\
A \triangle B \triangle C \quad &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2 \cdot \mathbb{P}(A \cap B) - 2 \cdot \mathbb{P}(A \cap C) - 2 \cdot \mathbb{P}(B \cap C) + 4 \cdot \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= 0.7 + 0.6 + 0.5 - 2 \cdot 0.4 - 2 \cdot 0.3 - 2 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = 0.4
\end{aligned}$$

6. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Die Augenzahlen werden der Größe nach geordnet, die Zufallsvariable X sei die mittlere (etwa $(2, 2, 5) \to 2$). Bestimmen Sie die verteilung von X.

   Insegesamt gibt es $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ Möglichkeiten.
   Um herauszufinden wie oft eine Zahl x $(1 \leq x \leq 6)$ in der Mitte liegt kann man sich folgendes überlegen. Hier am Beispiel Änzahl der vierer in der Mitte gezeigt". Zuerst schreibt man die Möglichen bereits sortieren Kombination auf, wobei es bei drei gleichen Ziffern nur eine Möglichkeit, bei zwei gleichen Ziffern 3 und bei keinen gleichen Ziffern 6 Möglichkeiten der Anordnung gibt (Permutation)

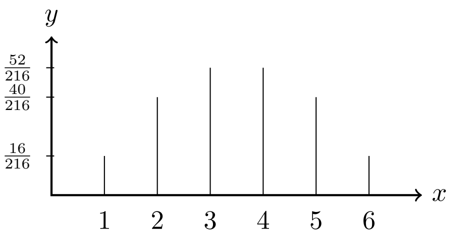
   $$\begin{array}{llll} 144\ (3\ M\ddot{o}gl.) & 244\ (3\ M\ddot{o}gl.) & 344\ (3\ M\ddot{o}gl.) & 444\ (1\ M\ddot{o}gl.) \\ 145\ (6\ M\ddot{o}gl.) & 245\ (6\ M\ddot{o}gl.) & 345\ (6\ M\ddot{o}gl.) & 445\ (3\ M\ddot{o}gl.)\ ] \\ 146\ (6\ M\ddot{o}gl.) & 246\ (6\ M\ddot{o}gl.) & 346\ (6\ M\ddot{o}gl.) & 446\ (3\ M\ddot{o}gl.) \end{array}$$

   Dieser Überlegung kann man auch auf die anderen möglichen mittleren Zahlen überführen und gelangt zu folgender Formel:

   $$x = 1 + 3 \cdot (6 - x) + (x - 1) \cdot (3 + 6 \cdot (6 - x))$$

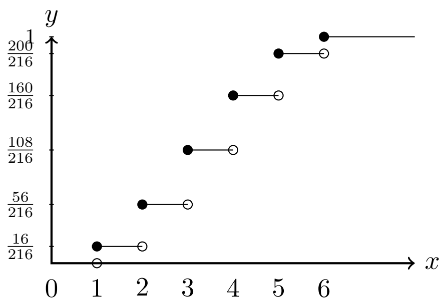
   Wahrscheinlichkeitsfunktion:

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{16}{216}$	$\frac{40}{216}$	$\frac{52}{216}$	$\frac{52}{216}$	$\frac{40}{216}$	$\frac{16}{216}$

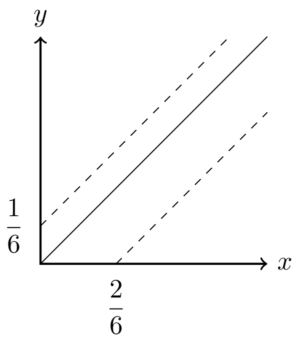
   

   Verteilungsfunktion:

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X \leq x)$	$\frac{16}{216}$	$\frac{56}{216}$	$\frac{108}{216}$	$\frac{160}{216}$	$\frac{200}{216}$	1

7. Anna und Bernhard frühstücken jeden Tag im selben Cafe. Sie kommen unabhängig voneinander zu zufälligen (gleichverteilten) Zeitpunkten zwischen 8 und 9 Uhr an. Anna bleibt 20 Minuten, Bernahrd 10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie einander treffen?

   $$\mathbb{P}(Treffen) = 1 - \frac{\left(\frac{4}{6}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{2} = 1 - 0.\dot{2} - 0.347 = 0.43$$