Zum ersten Übungstest kommt eine Auswahl aus den folgenden Fragen.

## 1 Definition von Konvergenz

Welche der folgenden Eigenschaften einer Folge $a_n$ sind äquivalent zu "$a_n$ ist konvergent" (in $\mathbb{R}$)?

Dazu können Eigenschaften der Form "Q l R r" abgefragt werden, wobei es folgende Möglichkeiten gibt:

| | |
|---|---|
| Q | $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$, |
| | $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon \geq 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$, |
| | $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon \neq 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$, |
| | $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 1)\,(\exists M)\,(\forall n > M)$, |
| | $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)$, |
| | $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M+1)$, |
| | $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\exists M)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall n > M)$, |
| | $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\exists n > M)$, |
| l | $\lvert a_n - a\rvert$, |
| | $\lvert a - a_n\rvert$, |
| | $a_n - a$, |
| | $a - a_n$ |
| R | $<$, |
| | $\leq$, |
| | $>$ |
| r | $\varepsilon$, |
| | $\varepsilon + 1$, |
| | $\varepsilon^2$, |
| | $\frac{\varepsilon}{2}$, |
| | $\sqrt{\varepsilon}$; |

Ebenfalls gefragt werden können Cauchyfolgen-Varianten, d.h., "Q l R r" mit R und r wie oben, und:

| | |
|---|---|
| Q | $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n, m > M)$ |
| | $(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall M)\,(\exists n, m > M)$ |
| | $(\exists M)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall n, m > M)$ |
| l | $\lvert a_n - a_m\rvert$, |
| | $\lvert a_m - a_n\rvert$, |
| | $a_n - a_m$, |
| | $a_m - a_n$ |

Beispiel: Q sei $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)$ und l sei $a_n - a$ und R sei $>$ und r sei $\varepsilon^2$; dann ergibt sich die Frage:

> Ist folgende Aussage äquivalent zu "$a_n$ ist konvergent:" $(\exists a \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M^2)\, a_n - a > \varepsilon^2$.

Formal sind das also 660 "verschiedene" Fragen.

Hinweise: Das sollte alles offensichtlich sein; beachte allerdings folgende möglicherweise überraschende Kombinationen:
$\ldots(\forall\varepsilon \neq 0)\cdots < \varepsilon^2$
$\ldots(\forall n, m > M)\ldots a_n - a_m < \varepsilon$ (ohne Betrag-Striche!)

### Bemerkung (Keine Prüfungsfrage)

Was ist mit $(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists a \in \mathbb{R})\,(\exists M)\,(\forall n > M)|a - a_n| < \varepsilon$? (Hinweis: das schaut zwar ganz falsch aus, funktioniert aber, siehe Cauchyfolgen)

## 2 Konvergenz

Gib für folgende Folgen $a_n$ und für allgemeines $\varepsilon > 0$ ein $M$ an mit $(\forall n > M)\,|a_n| < \varepsilon$

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $a_n = \frac{1}{2^n}$

(d) $a_n = 0$

(e) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

(f) $a_n = (-1)^n \frac{1}{10^n}$

## 3 Logik

Welche der folgenden Aussagen sind allgemein gültig (d.h. für beliebige mathematische Aussagen $\varphi$, $\psi$, für beliebige Menge $A$)

Zur Erinnerung: $\varphi \to \psi$ heißt "wenn dann" bzw "impliziert"; $\leftrightarrow$ heißt "gdw", $\wedge$ heißt "und", $\vee$ "oder" und $\neg$ "nicht".

(a) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\exists x \notin A)\varphi(x)$.

(b) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\exists x \in A)\neg\varphi(x)$.

(c) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\forall x \notin A)\neg\varphi(x)$.

(d) $\varphi \to \psi$ impliziert $\neg\varphi \to \neg\psi$.

(e) $\varphi \to \psi$ impliziert $\neg\psi \to \neg\varphi$.

(f) $\varphi \leftrightarrow \psi$ impliziert $\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$.

Und dieselben Fragen <u>nochmals für "gdw" statt "impliziert"</u>.

## 4 Ordnungen, Vollständigkeit

Welche der folgenden Aussagen gilt in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$:

(a) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Minimum.

(b) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Maximum.

(c) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Minimum.

(d) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Maximum.

(e) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Infimum.

(f) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Supremum.

(g) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Infimum.

(h) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Supremum.

## 5 Bruchrechnen

Welche der folgenden Brüche stellen die gleiche Zahl dar:

(a) $\frac{3}{\frac{5}{2}}$

(b) $\frac{2}{\frac{2}{4}}$

(c) $\frac{2}{\frac{4}{2}}$

(d) $\frac{2}{\frac{1}{2}}$

(e) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

(f) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

(g) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

(h) $\frac{5}{6}$

(i) $\frac{6}{5}$

(j) $\frac{2}{3}$

(k) $\frac{3}{2}$

(l) $\frac{1}{\frac{6}{5}}$

(m) 1

(n) 4

(Allenfalls gefragt in der Form: Welche der folgenden Brüche sind gleich $X$, wobei $X$ einer der Einträge ist, z.B. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$.)

## 6 Wachtumsraten

Ordne die folgenden Folgen nach Ihrer Wachstumsrate ($\ll$), wobei $k > 2$ und $1 < \ell < 2$

(a) $\log n$

(b) $\sqrt[k]{n}$

(c) $\sqrt{n}$

(d) $\sqrt[\ell]{n}$

(e) $n$

(f) $n \log(n)$

(g) $n^\ell$

(h) $n^2$

(i) $n^k$

(j) $2^n$

(Allenfalls gefragt in der Form: Gilt $\log(n) \ll n^k$ etc, das sind dann 56 “verschiedene” Fragen.)

## 7 Arithmetik mit Limiten

Wir setzen voraus dass die Folge $a_n$ konvergiert und die dazugehörige Reihe konvergiert, und dasselbe für $b_n$. Was gilt dann allgemein:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$

(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert

(e) $a_n$ hat einen Häufungspunkt

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot b_n)$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) - \sum_{n=1}^{\infty}(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$

## 8 Konvergenzkriterien

Sei $a_n$ eine Folge. Was gilt allgemein: (Alternierend heißt dass $a_n$ abwechselnd $\geq 0$ und $\leq 0$ ist.)

(a) Wenn $a_n$ beschränkt ist, dann konvergiert $a_n$.

(b) Wenn $a_n$ beschränkt ist, dann hat $a_n$ einen Häufungspunkt.

(c) Wenn $a_n$ beschränkt und monoton ist, dann konvergiert $a_n$.

(d) Wenn $a_n$ beschränkt und monoton ist, dann hat $a_n$ einen Häufungspunkt.

(e) Wenn $a_n$ einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert $a_n$.

(f) Wenn $a_n$ konvergiert, dann hat $a_n$ einen Häufungspunkt.

(g) Wenn $a_n$ genau einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert $a_n$.

(h) Wenn $a_n$ konvergiert, dann hat $a_n$ genau einen Häufungspunkt.

(i) Wenn $a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(j) Wenn $a_n$ eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(k) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $a_n$.

(l) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann is $a_n$ eine Nullfolge.

(m) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(n) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(o) Wenn $a_n$ alternierend ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(p) Wenn $a_n$ alternierend und eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(q) Wenn $a_n$ alternierend ist und $|a_n|$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

## 9 Mehr Konvergenz

Angenommen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Was gilt dann allgemein:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 100 \cdot a_n$ konvergiert.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot a_n$ konvergiert.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

## 10 Limiten von rationalen Funktionen

Konvergieren folgende Folgen? Wenn ja, was ist der Limes? Wenn nein, gehen sie nach unendlich? Oder nach minus unendlich? (Oder natürlich: Weder noch?)

(a) $\frac{3n^2+7n}{6n^2+1}$

(b) $\frac{3n^2+7n}{6n+1}$

(c) $\frac{3n^2+7n}{6n^3+1}$

(d) $\frac{17n^4+1}{17n^4-1}$

(e) $\frac{17n^4+1}{17n^3-1}$

(f) $\frac{17n^4+1}{17n^6-1}$

## 11 Mengenschreibweise

Welche der Folgenden Aussagen gilt: Dabei bezeichnen wir hier mit $(a, b)$ etc reelle Intervalle, und $\langle a, b\rangle$ das geordnete Paar.

(a) $\langle 2, 3\rangle = \langle 3, 2\rangle$

(b) $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

(c) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3)$

(d) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3]$

(e) $[1, 2) \cup (2, 3) = [1, 3)$

(f) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3) \setminus \{2\}$

(g) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3] \setminus \{2\}$

(h) $[1, 2) \cup (2, 3) = [1, 3) \setminus \{2\}$

## 12 Abzählbarkeit

Welche der folgenden Mengen ist abzählbar:

(a) $\emptyset$

(b) $\{7, 12, 22\}$

(c) $\{8, 13, 23\}$

(d) $\mathbb{N}$

(e) $\mathbb{N}_0$

(f) $\mathbb{Z}$

(g) $\mathbb{Q}$

(h) $\mathbb{R}$

(i) Das Intervall $(0, 1)$

(j) Das Intervall $(2, \infty)$

Kann auch gefragt werden: Welche Mengen haben dieselbe Kardinalität wie $X$, wobei $X$ eine der Beispiele ist, z.B. $\mathbb{Z}$.

Kann auch gefragt werden als: Ordne folgende Mengen Ihrer Kardinalität nach, beginnend mit der kleinsten.

## 13 Rationale Zahlen

Welche der folgenden Zahlen ist in $\mathbb{Q}$ (Periodische Zahlen notieren wir zB als $0.23\overline{25}$):

(a) $0,23\overline{762375}\ldots$

(b) $0,101\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}1\underbrace{0000}_{4}1\ldots$

(c) $\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{4}$

(e) $2\pi$

(f) $\frac{92835}{7235} + \frac{1}{10^{51}-1}$