Fragenausarbeitung

Automaten & Formale Sprachen

- Definieren Sie einen **endlichen Automaten**
  - in der üblichen Form **ohne Endsymbol** auf dem Eingabeband:
    Endlicher Automat ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei Q die Menge aller Zustände, Σ das Eingabealphabet, δ die Übergangsfunktion, q_0 der Startzustand und $F \subseteq Q$ die Menge der akzeptierenden Zustände ist.
  - mit dem **Endsymbol** Z_2 auf dem Eingabeband:
    Bei einem Automaten mit Endsymbol Z_2auf dem Eingabeband wird die Übergangsfunktion erweitert, um die Verarbeitung von Z_2 zu berücksichtigen.
  - und erläutern Sie die Unterschiede:
    Die Unterschiede liegen in der Handhabung des Eingabebandes und der Übergangsfunktion.
- Was ist die **CHOMSKY-Hierarchie**?
  Die Chomsky-Hierarchie ist eine Klassifizierung von Grammatiken und Sprachen, bestehend aus vier Stufen: regulär, kontextfrei, kontextsensitiv und rekursiv aufzählbar: $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$

Sprachfamilie	**Grammatiktyp**	**Maschinenmodell**
$\mathcal{L}_0$ (rekursiv aufzählbar)	unbeschränkt	Turing-Maschine (=EA + RAM)
$\mathcal{L}_1$ (kontextsensitiv)	kontextsensitiv monoton	linear beschränkter Automat (=EA + beschr. RAM)
$\mathcal{L}_2$ (kontextfrei)	kontextfrei	Kellerautomat (=EA + Stack)
$\mathcal{L}_3$ (regulär)	regulär	endlicher Automat (EA)

- Was ist eine **reguläre/kontextfreie/kontextsensitive/monotone** bzw. **unbeschränkte Grammatik** und wie nennt man die von diesen Grammatiken erzeugten **Sprachfamilien**?
  - **reguläre** Grammatik: nur Produktionen der Form $A \rightarrow aB$ oder $A \rightarrow a$ (reguläre Sprache)
  - **kontextfreie** Grammatik: Produktionen der Form $A \rightarrow \omega$ (kontextfreie Sprache)
  - **kontextsensitive** Grammatik: Produktionen der Form $\alpha A \beta \rightarrow \alpha\gamma\beta$ (kontextsensitive Sprache)
  - **monoton**: keine Beschränkung
  - **unbeschränkt**: keine Beschränkung (rekursiv aufzählbar)
- Erläutern Sie allgemein, wie man zur ***CHOMSKY-Normalform*** für eine *reguläre/kontextfreie/monotone* bzw. unbeschränkten *Grammatik* kommt!
  Jede Grammatik kann durch eine Reihe von Transformationen in die Chomsky-Normalform gebracht werden. Eine Grammatik ist in Chomsky-Normalform, wenn alle Produktionen entweder die Form $A \rightarrow BC$ oder $A \rightarrow a$ haben, wobei A, B und C Nichtterminalsymbole und a ein Terminalsymbol ist.
- Was ist die **strikte** bzw. **erweiterte GREIBACH-Normalform** für kontextfreie Grammatiken?

Die Greibach-Normalform ist eine Normalform für kontextfreie Grammatiken, in der Regel jede eine einzelne Variable auf ein Terminalsymbol gefolgt von beliebigen Variablen abbildet.
  - strikt: $A \to b\omega$ ($\omega \in N^*, b \in T, A \in N$)
  - erweitert: $A \to b\omega$ ($\omega \in (N \cup T)^*$)
- Wie werden **induktiv** die **regulären Sprachen** über einem Alphabet T definiert?
  Eine Sprache ist regulär, wenn sie durch eine reguläre Grammatik, einen endlichen Automaten oder einen regulären Ausdruck dargestellt werden kann.
- Welche **Sprachklassen unterhalb** der **regulären Sprachen** kennen Sie?
  Die leere Sprache und die endlichen Sprachen.
- Was ist eine **gsm** (mit Endsymbol Z_2 auf dem Eingabeband)?
  Eine gsm (generalized sequential machine) ist ein Maschinenmodell, das Ausgaben erzeugt, basierend auf dem aktuellen Zustand und der aktuellen Eingabe, einschließlich eines speziellen Endsymbols Z2.
- Was ist ein **Homomorphismus**?
  Ein Homomorphismus ist eine **strukturerhaltende Abbildung** zwischen zwei **algebraischen Strukturen**.
- Wie kann ein **Homomorphismus als gsm** dargestellt werden?
  Ein Homomorphismus kann als gsm (generalized sequential machine) dargestellt werden, indem die Übergangsfunktionen so konstruiert werden, dass sie die gleiche Abbildung wie der Homomorphismus aufweisen. Das bedeutet, dass jedes Zeichen der Eingabe entsprechend dem Homomorphismus in ein Zeichen der Ausgabe umgewandelt wird.
- Welche Eigenschaften charakterisieren eine **AFL** (Abstract Family of Languages, Abstrakte Sprachfamilie)?
  Eine AFL ist durch Eigenschaften wie Abschluss unter Union, Konkatenation, Kleene Stern und Homomorphismus charakterisiert.
- Beschreiben Sie (auch formal) eine **Turingmaschine** mit Eingabe- und Arbeitsband!
  Eine Turingmaschine ist ein 7-Tupel (Q, Σ, Γ, δ, q_0, q_a, q_r), wobei Q die Zustände, Σ das Eingabealphabet, Γ das Bandalphabet, δ die Übergangsfunktion, q_0 der Startzustand, $q_a$der akzeptierende Zustand und q_r der ablehnende Zustand ist.
- Was ist das **Halteproblem**?
  Das Halteproblem ist die unentscheidbare Frage, ob eine gegebene Turingmaschine für eine gegebene Eingabe anhält.
- Erläutern Sie den Begriff **Entscheidbarkeit**!
  Eine Menge oder Sprache ist entscheidbar, wenn es eine Turingmaschine gibt, die für jede Eingabe entweder mit "ja" oder "nein" endet.
- Wann heißt eine formale Sprache **entscheidbar**?
  Eine formale Sprache ist entscheidbar, wenn es eine Turingmaschine gibt, die genau dann akzeptiert, wenn eine Eingabe in der Sprache ist.
- Wie kann man das Modell der **Turingmaschine einschränken**, um die **Sprachfamilien** der regulären/kontextfreien/monotonen Sprachen zu charakterisieren?
  Reguläre Sprachen können von endlichen Automaten, kontextfreie von Kellerautomaten und monotonen Sprachen von linear beschränkten Automaten erkannt werden.
- Was ist ein **Kellerautomat** (PDA, Pushdown Automaton)?
  Ein Kellerautomat ist eine Art endlicher Automat, der einen zusätzlichen Stapelspeicher (den "Keller") verwendet.

- Was ist ein **LBA** (linear beschränkter Automat, linear bounded automaton)?
  Ein LBA ist eine Turingmaschine, die nur einen beschränkten Teil ihres Bandes nutzen darf – linear abhängig von Länge des Eingabeworts.
- Wie kann man mit Hilfe des Modells der **Turingmaschine Zeit**- und **Speicherplatzhierarchien** definieren?
  Zeit- und Speicherplatzhierarchien können durch die **Menge der Probleme** definiert werden, die in einer bestimmten Menge von Zeit oder Raum gelöst werden können.
- Geben Sie Beispiele für **bekannte Sprachfamilien** innerhalb der über das Modell der Turingmaschine definierten **Zeit**- und **Speicherplatzhierarchien**!
  Die **PSPACE**-Sprachen und die **NP-kompletten** Sprachen sind Beispiele für solche Sprachfamilien.

Logik

- Wann ist eine Formel eine **Tautologie** bzw. **Kontradiktion**?
  - **Tautologie** (gültig): Formel unter allen möglichen Interpretationen wahr (z.B. $p \vee \neg p$)
  - **Kontradiktion** (unerfüllbar): Formel unter allen möglichen Interpretationen falsch (z.B. $p \wedge \neg p$)
- Was heißt, eine Formel ist erfüllbar/widerlegbar/gültig/unerfüllbar?
  - **gültig**: $val_I(Formel) = 1$
    Alle Interpretationen führen zu einem wahren Aussageergebnis
    gültige Formel ist auch erfüllbar (nicht widerlegbar od. unerfüllbar)
  - **erfüllbar**: $val_I(Formel) = 1$
    Mindestens 1 Interpretation führt zu einem wahren Aussageergebnis
    erfüllbare Formel kann auch gültig od. widerlegbar sein (nicht unerfüllbar)
  - **widerlegbar**: $val_I(Formel) = 0$
    mindestens 1 Interpretation führt zu einem falschen Aussageergebnis
    widerlegbare Formel kann auch erfüllbar od. unerfüllbar sein (nicht gültig)
  - **unerfüllbar**: $val_I(Formel) = 0$
    Alle Interpretationen führen zu einem falschen Aussageergebnis
    unerfüllbare Formel ist widerlegbar (nicht gültig od. erfüllbar)
- Was ist eine **Signatur**?
  Signatur $\Sigma(D)$ zur Modellstruktur D, legt das Alphabet einer Sprache fest (die sich auf Gegenstände in D bezieht) und besteht aus Funktions-, Relations-, und Konstantensymbolen.
- Was bedeutet **Modell** bzw. **Gegenbeispiel** für eine prädikatenlogische Formel?
  - Ein Modell für eine prädikatenlogische Formel ist eine Interpretation, die den Aussagen der Formel Wahrheitswerte zuweist und diese erfüllt.
  - Ein Gegenbeispiel für eine prädikatenlogische Formel ist eine Interpretation, bei der die Formel nicht erfüllt ist, d.h. es existiert eine Belegung der Variablen, für die die Formel falsch ist.
- Was ist ein **Kalkül**?
  - ein syntaktisches Regelsystem
  - erlaubt gemäß seiner Semantik, logisch korrekte Argumente auszudrücken
  - ermöglicht schrittweisen & mechanischen Nachweis der Gültigkeit von Formeln/Konsequenzbehauptungen
- Was bedeutet **Vollständigkeit** bzw. **Korrektheit** eines Kalküls?
  - **Vollständigkeit** bedeutet, dass ein Kalkül alle gültigen Aussagen ableiten kann.

  - **Korrektheit** bedeutet, dass ein Kalkül keine falschen Aussagen ableitet, d.h. alle abgeleiteten Aussagen wahr sind, wenn die Ausgangsaussagen wahr sind.
- Was wissen Sie über das aussagenlogische **Hilbert-Kalkül**?
  - spezifiziert unterschiedlichste Logiken auf vergleichbare Weise
  - für viele nichtklassischen Logiken unverzichtbar
  - allerdings:
    - undurchsichtige Beweise (auch einfacher Formeln)
    - Vollständigkeit nicht einfach nachzuweisen
    - Ableitungen entsprechen nicht typischen natürlichsprachlichen bzw. mathematischen Argumenten & Argumentationsketten
    - keine direkte Beziehung zur Semantik
    - Beweissuche schwer zu automatisieren
- Was wissen Sie über das aussagenlogische **Tableaux-Kalkül**?
  - Das aussagenlogische Tableaux-Kalkül überprüft die Erfüllbarkeit von Formeln.
  - Es verwendet einen Baum (Tableau) und Regeln zur Erweiterung der Äste.
  - Ein geschlossenes Tableau zeigt einen Widerspruch, ein offenes Tableau eine erfüllbare Formel an.
  - Das Verfahren ist vollständig und flexibel anwendbar.
- Was ist ein **geschlossenes/offenes Tableaux**?
  Ist ein Tableau, bei dem alle Äste geschlossen sind, also zu einem widersprüchlichen Zustand führen. Ein offenes Tableau hingegen enthält mindestens einen offenen Ast, der noch weitere Erweiterungen zulässt.
- Was ist ein **geschlossener/offener Ast** im Tableaux-Kalkül?
  Ein Ast, der zu einem widersprüchlichen Zustand führt, während ein offener Ast noch weitere Erweiterungen ermöglicht.
- Warum führt eine **Ableitung** im aussagenlogischen **Tableaux-Kalkül immer** zu einem **Ergebnis**?
  Da das Kalkül auf dem vollständigen und widerspruchsfreien aussagenlogischen System basiert, in dem alle Ableitungen zu entweder geschlossenen Tableaus (Widersprüche) oder offenen Tableaus (nicht widerlegte Aussagen) führen.
- Was wissen Sie über das prädikatenlogische Tableaux-Kalkül?
  - Analysetool für die Prädikatenlogik zur Überprüfung von Aussagen.
  - Verwendet Ableitungsregeln, um alle möglichen Interpretationen zu untersuchen.
  - Baumstruktur mit Pfaden für mögliche Interpretationen.
  - Pfad führt entweder zu Widerspruch (Ungültigkeit) oder offenem Ende (Unentscheidbarkeit).
  - Ermöglicht Reduktion komplexer Formeln auf atomare Aussagen.
  - In der formalen Logik und Informatik verwendet.
  - Erfolgreiche Ableitung zeigt Gültigkeit, offenes Ende erfordert weitere Überlegungen.
- Was sind die wichtigsten Eigenschaften einer γ-Regel bzw. δ-Regel im prädikatenlogischen Tableux-Kalkül?

γ-Regeln: $\dfrac{\mathbf{t} : \forall x F}{\mathbf{t} : F(x/t)}$ $\dfrac{\mathbf{f} : \exists x F}{\mathbf{f} : F(x/t)}$

für beliebige geschlossene Terme t über Σ^{par}

δ-Regeln: $\dfrac{\mathbf{f} : \forall x F}{\mathbf{f} : F(x/c)}$ $\dfrac{\mathbf{t} : \exists x F}{\mathbf{t} : F(x/c)}$

für einen neuen Parameter c in Σ^{par}

- Warum muss eine **Ableitung** im **prädikatenlogischen Tableaux-Kalkül nicht immer** zu einem **Ergebnis** führen?
  Weil nicht jeder Pfad zu einem Widerspruch oder einer geschlossenen Aussage führt. Das bedeutet, dass die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Ausgangsformel offen bleibt und weitere Untersuchungen erforderlich sind.