443) Berechnen Sie $\int_2^3 x^2\,dx$ mit Hilfe von Untersummen bei äquidistanter Teilung. (Hinweis: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.)

444) Berechnen Sie $\int_1^2 x^3\,dx$ mit Hilfe von Untersummen bei äquidistanter Teilung. (Hinweis: $\sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+1}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2}$.)

445) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$$

durch Interpretation als Grenzwert einer Riemannschen Zwischensumme.

446) Mit Hilfe der Substitutionsregel beweise man die nachstehende Integrationsregel

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + C$$

und berechne damit $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

447) Man berechne $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.
(Anleitung: Zum Integrieren wähle man die Substitution $u = \sqrt{x-1}$. Ferner beachte man, dass das angegebene Integral sowohl bei $x = 1$ als auch bei $x = \infty$ uneigentlich ist.)

448–475) Man berechne:

448) $\int_1^2 (\sqrt[4]{x(\sqrt[3]{x\sqrt{x}})})^5\,dx$

449) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2 x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})\,dx$

450) $\int_1^2 (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2})\,dx$

451) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

452) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$

453) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

454) $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

455) $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$

456) $\int x \mathrm{Arcsin} x\,dx$

457) $\int \frac{x^4+x^2-1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}\,dx$

458) $\int \frac{x^6 - 6x + \sqrt{12x}}{x^2}\,dx$

459) $\int x^2 \cos x\,dx$

460) $\int \frac{dx}{x^2+2x+9}$

461) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x \cos^2 x}$

462) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x-6}\,dx$

463) $\int \arccos x\,dx$

464) $\int x \mathrm{Arctan}\,(x)\,dx$

465) $\int \frac{(x-3)^2}{x^{-7/2}}\,dx$

466) $\int x(\ln x)^2\,dx$

467) $\int \sin x(1+2\cos x)^4\,dx$

468) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

469) $\int (x^2+1)e^{-2x}\,dx$

470) $\int \frac{x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$

471) $\int \frac{x^2+3}{2x^2+7}\,dx$

472) $\int \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}\,dx$

473) $\int \sqrt{1+7x^2}\,dx$

474) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

475) $\int \frac{dx}{\sin x}$

476–481) Bildet $\mathbb{R}^2$ mit den angegebenen Operationen einen Vektorraum über $\mathbb{R}$?

476) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1, 0)$, $\lambda(x_1,x_2) = (\lambda x_1, 0)$.

477) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (0, x_2+y_2)$, $\lambda(x_1,x_2) = (0, \lambda x_2)$.

478) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_2+y_1, x_1+y_2)$, $\lambda(x_1,x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

479) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_2, x_2+y_1)$, $\lambda(x_1,x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

480) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1, 0)$, $\lambda(x_1,x_2) = (\lambda x_1, x_2)$.

481) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (0, x_2+y_2)$, $\lambda(x_1,x_2) = (x_1, \lambda x_2)$.

482–492) Untersuchen Sie, ob W Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3 V$ über $\mathbb{R}$ ist und beschreiben Sie die Menge W geometrisch:

482) $W = \{(x,y,z) \in V \mid x = 2y\}$

483) $W = \{(x,y,z) \in V \mid y = -z\}$

484) $W = \{(x,y,z) \in V \mid x+y+z = 0\}$

485) $W = \{(x,y,z) \in V \mid xy = 0\}$

486) $W = \{(x,y,z) \mid x+y+z \le 0\}$

487) $W = \{(x,y,z) \mid x+y+z \ge 0\}$

488) $W = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 0\}$

489) $W = \{(x,y,z) \mid x = 2z\}$

490) $W = \{(x,y,z) \mid x = -z\}$

491) $W = \{(x,y,z) \mid xy = 0\}$

492) $W = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1\}$

493–494) Untersuchen Sie, ob W Teilraum des Vektorraums V über K ist.

493) V = Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über $K = \mathbb{R}$, W die Menge aller *ungeraden* Funktionen in V, d. h. aller Funktionen f, für die gilt $f(x) = -f(-x)$.

494) V = Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über $K = \mathbb{R}$, W die Menge aller *geraden* Funktionen in V, d. h. aller Funktionen f, für die gilt $f(x) = f(-x)$.

495) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ (vgl. Aufgabe 280)) bildet mit den in $\mathbb{R}$ ausgeführten Operationen Addition und Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

496) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ (vgl. Aufgabe 280)) bildet mit den in $\mathbb{R}$ ausgeführten Operationen Addition und Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

497) Zeigen Sie: $\mathbb{C}$ bildet mit den in $\mathbb{C}$ ausgeführten Operationen Addition und Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

498) Zeigen Sie: In jedem Vektorraum V über dem Körper K gilt $\lambda \cdot o = o$ für alle $\lambda \in K$.

499) Zeigen Sie: In jedem Vektorraum V gilt $0 \cdot a = o$ für alle $a \in V$.

500–502) Zeigen Sie, daß in jedem Vektorraum V über dem Körper K für alle $a \in V$, $\lambda \in K$ gilt:

500) $(-\lambda)a = -(\lambda a)$

501) $\lambda(-a) = -(\lambda a)$

502) $(-\lambda)(-a) = \lambda a$

503) Zeigen Sie: Die Menge aller Polynome $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ vom Grad kleiner gleich 4 mit Koeffizienten a_i aus $\mathbb{Q}$ bildet mit der üblichen Addition und dem üblichen Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

504) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 503) der die Polynome x und x^3 enthält.

505) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 503) der die Polynome $x-x^2$ und $x+x^3$ enthält.

506) Zeigen Sie: Die Menge aller Polynome $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ vom Grad kleiner gleich 3 mit Koeffizienten a_i aus $\mathbb{R}$ bildet mit der üblichen Addition und dem üblichen Produkt mit einem Skalar einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

507) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 506) der die Polynome x und x^2 enthält.

508) Bestimmen Sie den kleinsten Teilraum des Vektorraumes aus 506) der die Polynome $2x^2-x^3$ und x^2+3x^3 enthält.

509) Zeigen Sie, daß $B=\{(1,2,4),(2,4,1),(4,2,1)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

510) Zeigen Sie, daß die Vektoren x_1,x_2,x_3 eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn x_1+x_2,x_2+x_3,x_3 linear unabhängig sind.

511) Zeigen Sie, daß die Vektoren x_1,x_2,x_3 eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn $x_1+x_2+x_3,x_2+x_3,x_3$ linear unabhängig sind.

512) Zeigen Sie, daß die Vektoren x_1,x_2,x_3 eines Vektorraumes genau dann linear unabhängig sind, wenn x_1-x_2,x_2,x_2-x_3 linear unabhängig sind.

513–515) Untersuchen Sie, ob die angegebene Abbildung A von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung ist.

513) $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7x_1+5x_2\\x_1-2x_3\end{pmatrix}$ **514)** $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1+5x_2\\x_1-3x_3\end{pmatrix}$

515) $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1+5x_2-x_3\\-3x_2\end{pmatrix}$

516) Sei $V=\mathbb{C}^3$, $U=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_1+z_2=z_3\}$, $W=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_2=-z_1\}$. Zeigen Sie, daß U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

517) Sei $V=\mathbb{C}^3$, $U=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_1-z_2=z_3\}$, $W=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_2=z_1\}$. Zeigen Sie, daß U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

518) Sei $V=\mathbb{C}^3$, $U=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_1=2z_2=3z_3\}$, $W=\{(z_1,z_2,z_3)\in V \mid z_2=0\}$. Zeigen Sie, daß U und W Teilräume von V sind und bestimmen Sie deren Dimension.

519) Sei $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Kern A und dim(Kern A).

520) Bestimmen Sie zu Beispiel 519) $A(\mathbb{R}^2)$ sowie Rang A und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\operatorname{Kern} A)+\operatorname{Rang} A=\dim\mathbb{R}^2$.

521) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung A aus 519) und 520) die Matrix bezüglich der kanonischen Basis.

522) Ein Produzent verarbeite die Rohstoffe R_1, R_2, R_3. Der Verbrauch der Rohstoffe während vier Wochen eines Monats sei wie folgt gegeben:

Woche / Rohstoff	R_1	R_2	R_3
1. Woche	8	4	12
2. Woche	10	6	5
3. Woche	7	8	5
4. Woche	11	7	9

Diese Rohstoffe sollen bei einem von zwei Lieferanten L_1, L_2 bezogen werden, wobei die Rohstoffpreise in nachstehender Tabelle angegeben sind:

Rohstoff / Lieferant	L_1	L_2
R_1	8	4
R_2	10	6
R_3	7	8

Man vergleiche die Rohstoffkosten für alle vier Wochen. Soll der Produzent beim Lieferanten L_1 oder L_2 bestellen?

523) Sei G die Menge aller regulären $n\times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$. Man zeige, daß $\langle G,\cdot\rangle$ eine Gruppe bildet.

524) Sei U die Menge aller $n\times n$-Matrizen B über $\mathbb{R}$ mit $\det B=\pm1$. Man zeige, daß U Normalteiler von G (aus Bsp. 523) ist.

525) Sei G die Menge aller $n\times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$ mit $\det A>0$. Man zeige, daß $\langle G,\cdot\rangle$ eine Gruppe bildet.

526) Sei U die Menge aller $n\times n$-Matrizen B über $\mathbb{R}$ mit $\det B=1$. Man zeige, daß U Normalteiler von G (aus Bsp. 525) ist.

527) Sei G die Menge aller $n\times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$ mit $\det A\in\mathbb{Q}$. Man zeige, daß $\langle G,\cdot\rangle$ eine Gruppe bildet.

528) Sei $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Kern A und dim(Kern A).

529) Bestimmen Sie zu Beispiel 528) $A(\mathbb{R}^2)$ sowie Rang A und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\operatorname{Kern} A)+\operatorname{Rang} A=\dim\mathbb{R}^2$.

530) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung A aus 528) und 529) die Matrix bezüglich der kanonischen Basis.

531) Sei $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Kern A und dim(Kern A).

532) Bestimmen Sie zu Beispiel 531) $A(\mathbb{R}^2)$ sowie Rang A und verifizieren Sie die Beziehung $\dim(\operatorname{Kern} A)+\operatorname{Rang} A=\dim\mathbb{R}^2$.

533) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung A aus 531) und 532) die Matrix bezüglich der kanonischen Basis.

534) Sei $V=\mathbb{R}_n[x]$ der Vektorraum der Polynome in x vom Grad $\le n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei weiters eine Abbildung D definiert durch

$$D\left(\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right)=\sum_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}.$$