Runde 5, Beispiel 33

LVA 118.181, Übungsrunde 5, 17.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 16.11.2006

1 Angabe

Man bestimme die Laplace-Transformierten von folgenden Funktionen.
(a) $f_1(t) = \int_0^t \tau \sin(\tau) \partial\tau$
(b) $f_2(t) = \sin^3(t)$. Anleitung: Man bestimme z. B. Konstanten a, b, sodass $\sin^3(t) = a\sin(3t) + b\sin(t)$ (Summensätze oder Moivre-Formeln).

2 Theoretische Grundlagen: Rechenregeln bei der $\mathcal{L}$-Transformation

2.1 Standard-Transformationen

$f(t)$	$F(s)$
$e^{a\cdot t}$	$\frac{1}{s}$
$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

2.2 Integration im Zeitbereich

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(t)) = \frac{1}{s \cdot F(s)}$$

2.3 Multiplikationssatz

$$\mathcal{L}(t \cdot F(t)) = -\frac{\partial}{\partial s} F(s)$$

3 Lösung des Beispiels

3.1 a

$$f_1(t) = \int_0^t \tau \sin(\tau) \partial\tau$$

Wenn man ein Integral $\mathcal{L}$-transformieren will laut Integrationssatz:

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(t)) = \frac{1}{s \cdot F(s)}$$

Zur Berechnung von $\mathcal{L}(f(t)), f(t) = t \cdot \sin(t)$ ist er Multiplikationssatz anzuwenden:

$$\mathcal{L}(t \cdot F(t)) = -\frac{\partial}{\partial s} F(s)$$

Somit bleibt nur noch $g(t) = \sin(t)$, was laut Formeltabelle $G(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega}$. Die Ableitung ergibt:

$$-\frac{\partial}{\partial s} G(s) = \frac{2 \cdot s}{(s^2+1)^2},$$

welche man dan noch in den Integrationsatz einsetzen muss:

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(t)) = \frac{1}{s \cdot F(s)} = \mathbf{\frac{2}{(s^2+1)^2}}$$

3.2 b

$f_2(t) = \sin^3(t)$. Anleitung: Man bestimme z. B. Konstanten a, b, sodass $\sin^3(t) = a\sin(3t) + b\sin(t)$ (Summensätze oder Moivre-Formeln).
Die für uns wichtigen Formeln lauten:

1. $sin(\alpha) \cdot sin(\beta) = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta))$
2. $sin(\alpha) \cdot cos(\beta) = \frac{1}{2}(sin(\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta))$

Diese Formeln wenden wir zur Vereinfachung wie folgt an:

$$f(t) = \sin t \cdot \sin t \cdot \sin t = (\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot t))) \cdot \sin t =$$
$$\frac{1}{2} \cdot \sin t - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot t) \cdot \sin t = \frac{1}{2} \cdot \sin t - \frac{1}{4} \cdot (-\sin(t) + \frac{3}{4}\sin(3 \cdot t)) =$$
$$\frac{3}{4} \cdot \sin t - \frac{31}{4} \cdot \sin(3 \cdot t)$$

Nun die Transformation:

$$\mathcal{L}(\mathbf{f(t)}) = \mathbf{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{s^2+9}}$$