Beispiel 425 (MA1 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 2, 23.03.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 03/2006

1 Angabe

Man berechne den Grenzwert der nachstehenden unbestimmten Formen:

$$(a)\quad \lim_{x\to 1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{ln(x)}$$
$$(b)\quad \lim_{x\to\infty} = \frac{3\cdot x^4}{e^{4\cdot x}}$$
$$(c)\quad \lim_{x\to 1/2} = (1-2\cdot x)\cdot\tan(x\cdot\pi)$$

2 Theoretische Grundlagen

3 Regel von l'Hospital

Der Grenzwert des Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen im Punkt x_0 (kann auch +/-unendlich sein), in dem beide den Grenzwert Null haben (Typ '0 / 0') oder beide bestimmt gegen (+/-)unendlich divergieren (Typ '∞ / ∞'), ist gleich dem Grenzwert des Quotienten der Ableitungen im Punkt x_0.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4 Lösung des Beispiels

4.1 (a)

Es ist der Grenzwert zu ermitteln von:

$$\lim_{x\to 1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{ln(x)}$$

Wir stellen folgende unbestimmte Form fest:

$$\lim_{x\to 1} = \frac{\overbrace{\sqrt{x^2-1}}^{\to 0}}{\overbrace{ln(x)}^{\to 0}} \qquad \Rightarrow \frac{0}{0}$$

Wir leiten nun gemäss der Regel von l'Hospital Zähler und Nenner separat ab.

Beim Zähler setzen wir $u = x^2 - 1$, so dass wir den Term $\sqrt{u} = u^{1/2}$ abzuleiten haben. Diese Ableitung ergibt $0.5 \cdot u^{-0.5}$ und die innere Ableitung von u ist $2x$. Somit lautet der separat ableitete Zähler:

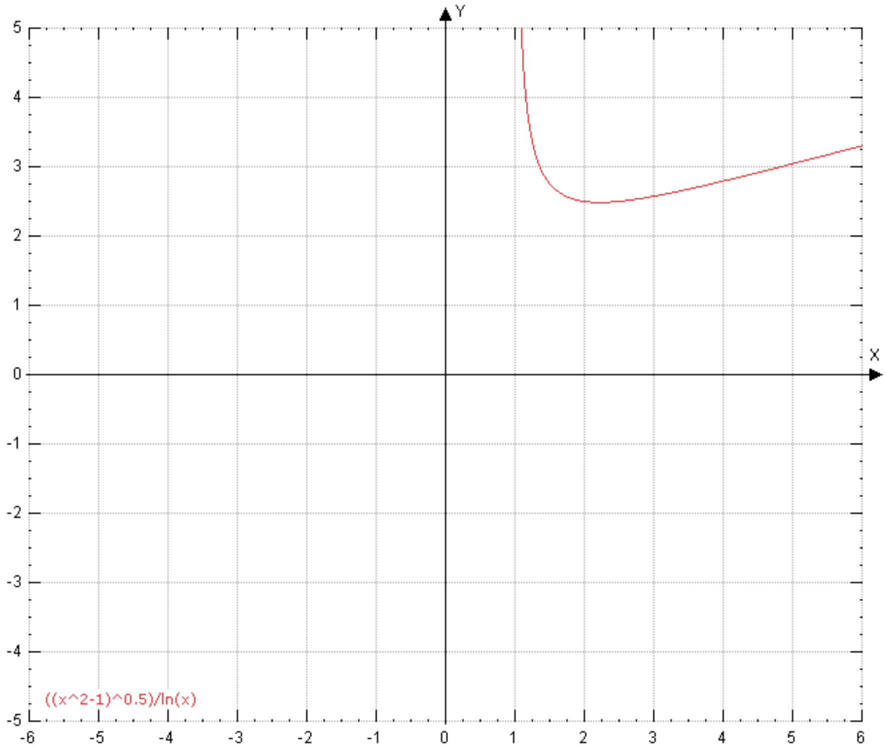
$$x \cdot (x^2 - 1)^{-1/2}$$

Für die separate Ableitung des Nenners gilt: Per definitionem ist die Ableitung von $\ln(x)$ eben x^{-1}.

Somit können wir gemäss der er Regel von l'Hospital den Grenzwert abzulesen versuchen aus:

$$\lim_{x \to 1} = \frac{x \cdot (x^2 - 1)^{-1/2}}{x^{-1}}$$

Der Zähler geht gegen ∞, der Nenner gegen 1, somit ist der **Grenzwert** ∞!
Der Funktionsgraph:



4.2 (b)

Es ist der Grenzwert zu ermitteln von:

$$\lim_{x \to \infty} = \frac{3 \cdot x^4}{e^{4 \cdot x}}$$

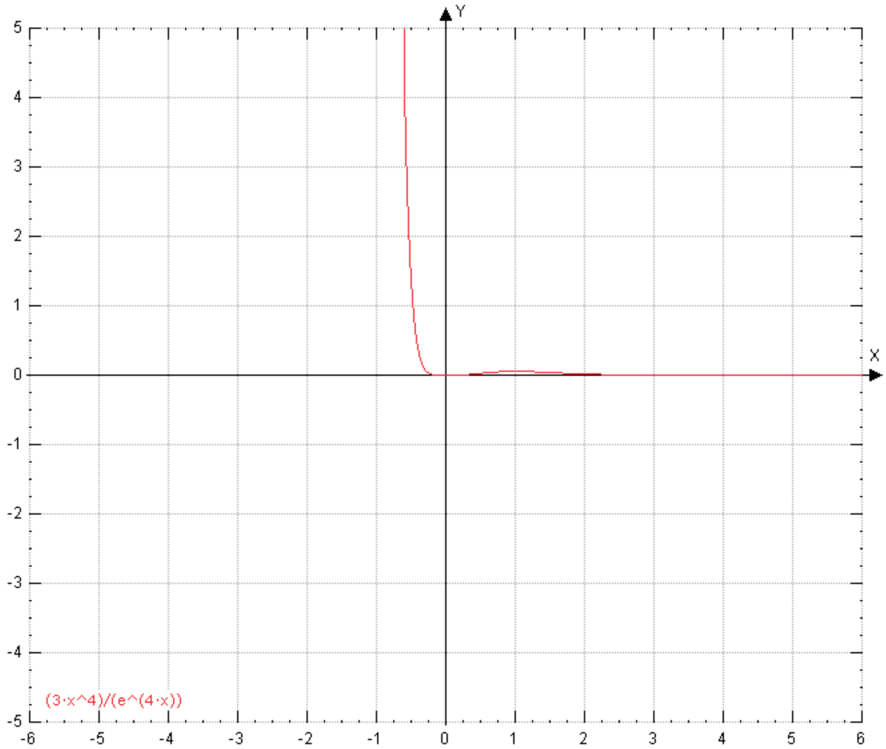
Für die Ableitungen von Zähler und Nenner müssen wir folgende Regeln beachten:

- $(x^k)' = a \cdot x^{k-1}$
- $(e^{k\cdot x})' = k \cdot e^{k\cdot x}$

Wir leiten nun Zähler und Nenner so lange separat ab, bis wir eine Aussage über den Grenzwert machen können:

$$\lim x \to \infty = \frac{3 \cdot x^4}{e^{4\cdot x}} = \frac{12 \cdot x^3}{4 \cdot e^{4\cdot x}} = \frac{36 \cdot x^2}{16 \cdot e^{4\cdot x}} = \frac{72 \cdot x}{64 \cdot e^{4\cdot x}} = \frac{72}{256 \cdot e^{4\cdot x}}$$

Da der Zähler konstant ist und der Nenner gegen ∞ geht, liegt ein Grenzwert in der Form $\frac{a}{\infty}$ vor. Der **Grenzwert** ist somit **0**.
Der Funktionsgraph:



4.3 (c)

Es ist der Grenzwert zu ermitteln von:

$$\lim_{x\to 1/2} = (1 - 2 \cdot x) \cdot \tan(x \cdot \pi)$$

Zunächst formen wir die Angabe um auf

$$\lim_{x\to 1/2} = \frac{1 - 2 \cdot x}{\cot(x \cdot \pi)} \qquad \text{da } (\tan(\pi \cdot x)) = \frac{1}{\cot(\pi \cdot x)}$$

Wir leiten nun gemäss der Regel von l'Hospital Zähler und Nenner separat ab.
Die erste Ableitung des Zählers ist -2.
Die erste Ableitung des Nenners ist $-\frac{\pi}{(-\sin^2(\pi \cdot x))}$, weil $(\cot(k \cdot x))' = -\frac{k}{-\sin^2(k \cdot x)}$.
Somit müssen wir den Grenzwert untersuchen von:

$$\lim_{x \to 1/2} = \frac{-2}{\pi \cdot ((-\sin^2(\pi \cdot x)))^{-1}}$$

Setzen wir nun 1/2 ein, erhalten wir als **Grenzwert** $\frac{\mathbf{2}}{\pi}$.
Der Funktionsgraph: