

# 1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung SS 2020

Gernot Salzer, Marion Scholz

20. Mai 2020

## Aufgabe 1 (3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Schlussfolgerungen die zugrundeliegende Inferenzregel an und stellen Sie fest, ob diese gültig ist. Wenn ja, geben Sie unter Verwendung von Alltagsbegriffen eine weitere Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt. Wenn nein, modifizieren Sie die Inferenzregel möglichst geringfügig, um eine gültige Regel zu erhalten, und geben Sie dann eine konkrete Schlussfolgerung mit Alltagsbegriffen an, die dieser Regel entspricht.

- (a) Siehe Abbildung rechts.
- (b) Alle Affen rasen durch den Wald. Bobo ist ein Affe.  
Daher rast Bobo durch den Wald.
- (c) Gülcan mag keine Jungs. Max ist ein Junge, daher mag  
Max Gülcan nicht.



## Lösung

- (a) Ich bin ein Vogel.

Ich kann fliegen.  
Alle Vögel können fliegen.

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Vertauscht man die zweite Prämisse mit der Konklusion, erhält man eine gültige Inferenzregel:

$x$  ist ein  $y$ .  
Alle  $y$  können  $z$ .  
 $x$  kann  $z$ .

Ein Beispiel, dem diese Inferenzregel zugrunde liegt:

Der Specht ist ein Vogel.  
Vögel können fliegen.  
Der Specht kann fliegen.

Inferenzregel:  $x$  ist ein  $y$ .

$x$  kann  $z$ .  
Alle  $y$  können  $z$ .

- (b) Alle Affen rasen durch den Wald. Inferenzregel: Alle  $x$  machen  $y$ .  
 Bobo ist ein Affe.  $z$  ist ein  $x$ .  
 ----- -----  
 Bobo rast durch den Wald.  $z$  macht  $y$ .

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

Alle Vögel singen.  
 Der Kakadu ist ein Vogel.  
 -----  
 Der Kakadu singt.

- (c) Gülcan mag keine Jungs. Inferenzregel:  $x$  mag niemanden, der ein  $y$  ist.  
 Max ist ein Junge  $z$  ist ein  $y$ .  
 ----- -----  
 Max mag Gülcan nicht.  $z$  mag  $x$  nicht.

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Vertauscht man in der Konklusion die beiden Variablen, erhält man eine gültige Inferenzregel:

$x$  mag niemanden, der ein  $y$  ist.  
 $z$  ist ein  $y$ .  
 -----  
 $x$  mag  $z$  nicht.

Ein Beispiel, dem diese Inferenzregel zugrunde liegt:

Max mag keine Hausübungen.  
 Mathe-HÜ ist eine Hausübung.  
 -----  
 Max mag die Mathe-HÜ nicht.

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Analysieren Sie die folgenden Text und identifizieren Sie die logische Struktur sowie die Elementaraussagen. Betrachten Sie dabei jeden Satz einzeln für sich.

Im Frühjahr kauft der Gartenfreund Pflanzen und Erde. Falls es sich um eine Topfpflanze handelt, besorgt er außerdem einen Topf oder ein Blumenkisterl. Nur wenn es sich um eine besonders anspruchsvolle Pflanze handelt, kauft er auch Dünger und hält sich genau an die Pflanzanleitung. Er pflanzt Sellerie und Salat nie gemeinsam in ein Beet. Er gräbt ein Loch im Beet oder bereitet einen Topf vor. Er befreit die Pflanze vom Topf, setzt sie vorsichtig in das vorbereitete Loch und füllt das Loch mit Erde auf. Die Pflanze ist nun erfolgreich eingepflanzt. Bravo!

## Lösung

Manche der Aussagen enthalten eine zeitliche Komponente, die sich in der klassischen Aussagenlogik nicht adäquat ausdrücken lässt. Dafür müsste man eine Zeitlogik verwenden, mit der man zum Beispiel spezifizieren kann, dass im nächsten Zeitpunkt (oder irgendwann in der Zukunft) etwas gilt bzw. getan werden muss, wenn derzeit etwas gilt bzw. getan wird.

- (a) *Im Frühjahr kauft der Gartenfreund Pflanzen und Erde.*  
*A ... Er kauft Pflanzen.*  
*B ... Er kauft Erde.*  
 Struktur:  $A$  und  $B$   
 Formel:  $A \wedge B$
- (b) *Falls es sich um eine Topfpflanze handelt, besorgt er außerdem einen Topf oder ein Blumenkisterl.*  
*A ... Es handelt sich um eine Topfpflanze.*  
*B ... Er besorgt einen Topf.*  
*C ... Er besorgt ein Blumenkisterl.*  
 Struktur: Wenn  $A$ , dann (entweder)  $B$  oder  $C$   
 Formel:  $A \supset (B \vee C)$  oder  $A \supset (B \neq C)$
- Welche der beiden Formeln die besser Formalisierung darstellt, hängt vom Kontext ab. Wenn in einer Anleitung steht, dass ein Topf oder ein Blumenkisterl benötigt wird, dann ist das exklusiv gemeint: Man benötigt nur eines der beiden, nicht beide. Ebenso würde es auf Unverständnis stoßen, wenn ich den Auftrag erhalte, eines der beiden zu kaufen, und dann mit beiden zurückkomme. Sollen die Formeln aber dazu verwendet werden um zu überprüfen, ob alle Voraussetzungen für eine erfolgreiche Pflanzung gegeben sind, würde man das inklusive Oder verwenden. Die Formel soll ja nicht fehlschlagen, wenn mehr als das Minimum vorhanden ist, da die Pflanzung auch stattfinden kann, wenn beides gekauft wurde.
- (c) *Nur wenn es sich um eine besonders anspruchsvolle Pflanze handelt, kauft er auch Dünger und hält sich genau an die Pflanzanleitung.*  
*A ... Es handelt sich um eine besonders anspruchsvolle Pflanze.*  
*B ... Er kauft Dünger.*  
*C ... Er befolgt die Pflanzanleitung.*  
 Struktur: Nur wenn  $A$  dann  $B$  und  $C$   
 Formel:  $A \subset (B \wedge C)$  bzw.  $(A \subset B) \wedge C$
- (d) *Er pflanzt Sellerie und Salat nie gemeinsam in ein Beet.*  
*A ... Er pflanzt Sellerie.*  
*B ... Er pflanzt Salat.*  
 Struktur:  $A$  nicht gemeinsam mit  $B$   
 Formel:  $\neg(A \wedge B)$  bzw.  $A \uparrow B$
- (e) *Er gräbt ein Loch im Beet oder bereitet einen Topf vor.*  
*A ... Er gräbt ein Loch im Beet.*  
*B ... Er bereitet einen Topf vor.*  
 Struktur: (Entweder)  $A$  oder  $B$   
 Formel:  $A \neq B$  oder  $A \vee B$  (Diskussion siehe Punkt b)
- (f) *Er befreit die Pflanze vom Topf, setzt sie vorsichtig in das vorbereitete Loch und füllt das Loch mit Erde auf.*

$A$  ... Er befreit die Pflanze vom Topf.  
 $B$  ... Er setzt sie vorsichtig in das vorbereitete Loch.  
 $C$  ... Er füllt das Loch mit Erde auf.  
Struktur:  $A$  und  $B$  und  $C$   
Formel:  $A \wedge B \wedge C$

(g) *Die Pflanze ist nun erfolgreich eingepflanzt.*  
 $A$  ... Die Pflanze ist erfolgreich eingepflanzt.  
Struktur:  $A$   
Formel:  $A$

(h) *Bravo!*  
Hierbei handelt es sich um keine Aussage, da „Bravo!“ weder wahr noch falsch sein kann.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Anna möchte ein Bild malen. Ihr stehen die Farben Rot, Blau und Gelb zur Verfügung. Wie können die folgenden Sätze formalisiert werden?

- (a) Anna verwendet nur Rot.
- (b) Anna verwendet zumindest zwei Farben.
- (c) Anna verwendet höchstens zwei Farben.
- (d) Anna verwendet alle drei Farben.
- (e) Anna verwendet Blau nur, wenn sie auch Rot verwendet.
- (f) Anna möchte entweder Blau oder Rot verwenden, aber nicht beides.
- (g) Anna verwendet Blau aber nicht Rot.
- (h) Wenn Anna Rot verwendet, dann auch Blau und Gelb.

### Lösung

$B$  ... Anna verwendet Blau.  
 $G$  ... Anna verwendet Gelb.  
 $R$  ... Anna verwendet Rot.

- (a)  $R \wedge \neg G \wedge \neg B$
- (b)  $(R \wedge G) \vee (R \wedge B) \vee (G \wedge B)$
- (c)  $\neg(R \wedge G \wedge B)$  oder  $\neg R \vee \neg G \vee \neg B$
- (d)  $R \wedge G \wedge B$

- (e)  $B \supset R$
- (f)  $B \neq R$
- (g)  $B \wedge \neg R$
- (h)  $R \supset (B \wedge G)$

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge  $\{\text{or}, \text{xor}, \text{true}\}$  vollständig ist für die Klasse der aussagenlogischen Funktionen.
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge  $\{\text{or}, \text{xor}\}$  nicht vollständig ist.

Anmerkung: Die Begründung, dass in jedem Ausdruck immer mindestens eine Variable vorkommen muss und es daher nicht möglich ist, nullstellige Funktionen (also Konstanten wie `false`) darzustellen, ist nicht ausreichend, da das nur ein Problem der gewählten Darstellung ist. Wenn Sie aber zeigen können, dass beispielsweise die einstellige konstante Funktion definiert durch  $\text{false}(x) = 0$  nicht darstellbar ist, ist das schlüssig.

### Lösung

- (a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Funktionsmenge  $\{\text{and}, \text{not}\}$  vollständig ist. Es reicht daher zu zeigen, dass diese beiden Funktionen durch die Funktionen in  $\{\text{or}, \text{xor}, \text{true}\}$  darstellbar sind. Tatsächlich gilt  $\text{not}(x) = \text{xor}(x, \text{true})$ , wie sich durch Auswertung der beiden Seiten in den zwei möglichen Wahrheitsbelegungen überprüfen lässt:

$x$	$\text{not}(x) = \text{xor}(x, \text{true})$
0	1 0 ✓ 1 0 1
1	0 1 ✓ 0 1 1

Weiters lässt sich `and` aus `or` und `not` und damit aus `or`, `xor` und `true` zusammensetzen:

$$\begin{aligned} \text{and}(x, y) &= \text{not}(\text{or}(\text{not}(x), \text{not}(y))) \\ &= \text{xor}(\text{or}(\text{xor}(x, \text{true}), \text{xor}(y, \text{true})), \text{true}) \end{aligned}$$

$x$	$y$	$\text{and}(x, y) = \text{xor}(\text{or}(\text{xor}(x, \text{true}), \text{xor}(y, \text{true})), \text{true})$
0	0	0 0 0 ✓ 0 1 1 0 1 1 0 1 1
0	1	0 0 1 ✓ 0 1 1 0 1 0 1 1 1
1	0	0 1 0 ✓ 0 1 0 1 1 1 0 1 1
1	1	1 1 1 ✓ 1 0 0 1 1 0 1 1 1

- (b) Es genügt von einer einzigen Funktion zu zeigen, dass sie nicht durch `or` und `xor` darstellbar ist. Wir untersuchen, welche einstelligen Funktionen darstellbar sind, indem

wir vom einzigen Argument  $x$  ausgehend die beiden Funktionen anwenden. Wir stellen zunächst fest, dass  $\text{or}(x, x) = x$  und  $\text{xor}(x, x) = \text{false}(x)$  gilt. Beziehen wir  $\text{false}(x)$  mit ein, erhalten wir weiters  $\text{or}(\text{false}(x), x) = \text{or}(x, \text{false}(x)) = \text{xor}(\text{false}(x), x) = \text{xor}(x, \text{false}(x)) = x$  und  $\text{or}(\text{false}(x), \text{false}(x)) = \text{xor}(\text{false}(x), \text{false}(x)) = \text{false}(x)$ . Wir stellen daher folgende Behauptung auf.

*Behauptung:* Jeder Ausdruck bestehend aus  $\text{or}$ ,  $\text{xor}$  und  $x$  ist äquivalent zu  $x$  oder  $\text{false}(x)$ .

Der Beweis erfolgt induktiv nach der Anzahl  $n$  der Anwendungen der Funktionen  $\text{or}$  bzw.  $\text{xor}$ .

*Induktionsanfang  $n = 0$ :* Der einzige Ausdruck ohne Anwendung von  $\text{or}$  und  $\text{xor}$  ist  $x$  selber. Dafür gilt unsere Behauptung.

*Induktionshypothese:* Unsere Behauptung gelte für alle Ausdrücke mit  $n$  oder weniger Anwendungen von  $\text{or}$  bzw.  $\text{xor}$ .

*Induktionsschritt:* Wir zeigen, dass unter der Annahme, dass die Induktionshypothese zutrifft, unsere Behauptung auch für Ausdrücke mit  $n + 1$  Anwendungen von  $\text{or}$  bzw.  $\text{xor}$  gilt. Wir haben also einen Ausdruck  $\text{or}(f(x), g(x))$  bzw.  $\text{xor}(f(x), g(x))$  vor uns, bei dem sowohl  $f$  als auch  $g$  mit  $n$  oder weniger Anwendungen von  $\text{or}$  bzw.  $\text{xor}$  definiert sind. Laut Hypothese ist jeder der beiden Ausdrücke äquivalent zu  $x$  bzw.  $\text{false}(x)$ . Wie wir oben aber festgestellt haben, sind die Funktionen  $\text{or}$  und  $\text{xor}$  mit den Argumenten  $x$  bzw.  $\text{false}(x)$  wieder äquivalent zu den Funktionen  $x$  bzw.  $\text{false}(x)$ .

Da somit die einzigen darstellbaren einstelligen Funktionen äquivalent zu  $x$  (identische Abbildung) bzw.  $\text{false}(x)$  sind, ist z.B. die einstellige Funktion  $\text{not}$  nicht darstellbar. Die Menge  $\{\text{or}, \text{xor}\}$  ist daher nicht funktional vollständig.

## Aufgabe 5 (3 Punkte)

Sei  $F$  die Formel  $((((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A) \wedge B)$ , wobei  $A$ ,  $B$  und  $C$  aussagenlogische Variablen sind.

- Zeigen Sie, dass  $F$  syntaktisch korrekt ist.
- Berechnen Sie schrittweise  $\text{val}_I(F)$  für  $I(A) = 1$ ,  $I(B) = 0$  und  $I(C) = 1$ .
- Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel  $F$  gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

## Lösung

- Laut Vorlesung ist die Menge  $\mathcal{A}$  der aussagenlogischen Formeln die kleinste Menge, für die gilt:

(a1)  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2)  $\{\top, \perp\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3)  $\neg F \in \mathcal{A}$ , wenn  $F \in \mathcal{A}$ .

(a4)  $(F * G) \in \mathcal{A}$ , wenn  $F, G \in \mathcal{A}$  und  $*$   $\in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \neq, \supset, \subset\}$ .

wobei  $\mathcal{V} = \{A, B, C, \dots\}$  die Menge der aussagenlogischen Variablen ist.

Wir zeigen, dass  $((((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A) \wedge B)$  eine aussagenlogische Formel gemäß dieser Definition ist.

- (1) Die Variablen  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind Formeln (a1).
- (2) Da  $B$  eine Formel ist (Punkt 1), ist auch  $\neg B$  eine Formel (a3).
- (3) Da  $A$  und  $\neg B$  Formeln sind (Punkt 1 bzw. 2), ist auch  $(A \wedge \neg B)$  eine Formel (a4).
- (4) Da  $\neg B$  und  $C$  Formeln sind (Punkt 2 bzw. 1), ist auch  $(\neg B \supset C)$  eine Formel (a4).
- (5) Da  $(A \wedge \neg B)$  und  $(\neg B \supset C)$  Formeln sind (Punkt 4 bzw. 5), ist auch  $((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C))$  eine Formel (a4).
- (6) Da  $((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C))$  und  $A$  Formeln sind (Punkt 5 bzw. 1), ist auch  $((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A$  eine Formel (a4).
- (7) Da  $((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A$  und  $B$  Formeln sind (Punkt 6 bzw. 1), ist auch  $((((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A) \wedge B)$  eine Formel (a4).

Dieselbe Argumentation in Form eines Baumes:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}} \text{ a1} \quad \frac{\frac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}} \text{ a1}}{\neg B} \text{ a3}}{(A \wedge \neg B) \in \mathcal{A}} \text{ a4} \quad \frac{\frac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}} \text{ a1}}{\neg B} \text{ a3} \quad \frac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}} \text{ a1}}{(\neg B \supset C) \in \mathcal{A}} \text{ a4}}{\frac{((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \in \mathcal{A}}{((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A} \text{ a4} \quad \frac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}} \text{ a1}}{(((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A) \in \mathcal{A}} \text{ a4} \quad \frac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}} \text{ a1}}{(((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A) \wedge B} \in \mathcal{A} \text{ a4}
 \end{array}$$

Die horizontalen Linien sind als wenn-dann zu lesen, wobei die Prämissen des Schlusses oberhalb und die Konklusion unterhalb der Linie angegeben werden. Neben dem Strich steht die angewendete Regel.

- (b)  $\text{val}_I(((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A) \wedge B$   
 $= \text{val}_I(((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A)$  and  $\text{val}_I(B)$   
 $= (\text{val}_I((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \text{ implies } \text{val}_I(A))$  and 0  
 $= ((\text{val}_I(A \wedge \neg B) \text{ or } \text{val}_I(\neg B \supset C)) \text{ implies } 1)$  and 0  
 $= (((\text{val}_I(A) \text{ and } \text{val}_I(\neg B)) \text{ or } (\text{val}_I(\neg B) \text{ implies } \text{val}_I(C))) \text{ implies } 1)$  and 0  
 $= (((1 \text{ and not } \text{val}_I(B)) \text{ or } (\text{not } \text{val}_I(B) \text{ implies } 1)) \text{ implies } 1)$  and 0  
 $= (((1 \text{ and not } 0) \text{ or } (\text{not } 0 \text{ implies } 1)) \text{ implies } 1)$  and 0  
 $= (((1 \text{ and } 1) \text{ or } (1 \text{ implies } 1)) \text{ implies } 1)$  and 0  
 $= ((1 \text{ or } 1) \text{ implies } 1)$  and 0  
 $= (1 \text{ implies } 1)$  and 0  
 $= 1 \text{ and } 0 = 0$

Geht es lediglich um eine präzise Berechnung des Endergebnisses (und nicht um das Verstehen der rekursiven Definition der Funktion  $\text{val}$ ), reichen wegen der Eigenschaft  $x \text{ and } 0 = 0$  die folgenden Zeilen.

$$\begin{aligned} & \text{val}_I (((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A) \wedge B \\ &= \text{val}_I (((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A) \text{ and } \text{val}_I(B) \\ &= \text{val}_I (((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A) \text{ and } 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (c) Wir berechnen den Wert der Formel für alle Interpretationen mittels einer Wahrheitstafel. An dieser lassen sich dann die Eigenschaften der Formel ablesen.

$A$	$B$	$C$	$((A \wedge \neg B) \vee (\neg B \supset C)) \supset A) \wedge B$						
0	0	0	0	1	0	1	0	1	<b>0</b>
0	0	1	0	1	1	1	1	0	<b>0</b>
0	1	0	0	0	1	0	1	0	<b>0</b>
0	1	1	0	0	1	0	1	0	<b>0</b>
1	0	0	1	1	1	1	0	1	<b>0</b>
1	0	1	1	1	1	1	1	1	<b>0</b>
1	1	0	0	0	1	0	1	1	<b>1</b>
1	1	1	0	0	1	0	1	1	<b>1</b>

Die Formel ist somit erfüllbar und widerlegbar, aber weder gültig noch unerfüllbar.

### Aufgabe 6 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Formeln

$$(A \downarrow C) \supset (A \supset \neg B) \quad \text{und} \quad (A \supset (B \neq \neg B)) \vee C$$

äquivalent sind, und zwar

- (a) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.  
 (b) durch algebraische Umformungen.

### Lösung

(a) Wahrheitstafel:

$A$	$B$	$C$	$(A \downarrow C) \supset (A \supset \neg B) = (A \supset (B \neq \neg B)) \vee C$							
0	0	0	1	1	1	1	✓	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	✓	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	✓	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	✓	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	✓	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	✓	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	✓	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	✓	1	1	0



Da beide Formeln in sämtlichen Wahrheitsbelegungen denselben Wert liefern, sind sie äquivalent.

Tatsächlich ist es gar nicht notwendig, die Wahrheitstabelle vollständig zu befüllen. Wir wissen zum Beispiel, dass  $\supset$  den Wert 1 liefert, wenn die linke Seite den Wert 0 besitzt. Damit ist das Ergebnis der ersten Formel für jene Interpretationen, in denen  $(A \downarrow C)$  den Wert 0 besitzt, bereits mit 1 festgelegt. Das  $\vee$  in der zweiten Formel liefert den Wert 1 sobald ein Teil den Wert 1 liefert, also zum Beispiel immer wenn C den Wert 1 hat.

$A$	$B$	$C$	$(A \downarrow C) \supset (A \supset \neg B) = (A \supset (B \neq \neg B)) \vee C$								
0	0	0	1	1	1	1	✓	1	1	1	
0	0	1	0	1			✓			1	
0	1	0	1	1	1	0	✓	1	1	0	1
0	1	1	0	1			✓				1
1	0	0	0	1			✓	1	1	1	1
1	0	1	0	1			✓				1
1	1	0	0	1			✓	1	1	0	1
1	1	1	0	1			✓				1

- (b) Wir vereinfachen beide Formeln. Da wir bei beiden dieselbe Formel (genauer gesagt  $\top$ ) erhalten, sind die ursprünglichen Formeln äquivalent.

$$\begin{aligned}
 (A \downarrow C) \supset (A \supset \neg B) & & F \supset G &= \neg F \vee G \\
 = \neg(A \downarrow C) \vee (A \supset \neg B) & & F \downarrow G &= \neg F \wedge \neg G \\
 = \neg(\neg A \wedge \neg C) \vee (A \supset \neg B) & & \neg(F \wedge G) &= \neg F \vee \neg G \\
 = \neg\neg A \vee \neg\neg C \vee (A \supset \neg B) & & \neg\neg F &= F \\
 = A \vee C \vee (A \supset \neg B) & & F \supset G &= \neg F \vee G \\
 = A \vee C \vee \neg A \vee \neg B & & F \vee \neg F &= \top \\
 = \top \vee C \vee \neg B & & F \vee \top &= \top \\
 = \top & & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A \supset (B \neq \neg B)) \vee C & & F \supset G &= \neg F \vee G \\
 = \neg A \vee (B \neq \neg B) \vee C & & F \neq G &= (\neg F \vee \neg G) \wedge (F \vee G) \\
 = \neg A \vee ((\neg B \vee \neg\neg B) \wedge (B \vee \neg B)) \vee C & & \neg\neg F &= F \\
 = \neg A \vee ((\neg B \vee B) \wedge (B \vee \neg B)) \vee C & & F \vee \neg F &= \top \\
 = \neg A \vee (\top \wedge \top) \vee C & & \top \wedge \top &= \top \\
 = \neg A \vee \top \vee C & & F \vee \top &= \top \\
 = \top & & &
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 7 (3 Punkte)

Gegeben sei folgender Sachverhalt.

Otos sind Fluzis oder Ezos. Wenn Otos keine Ezos sind, dann sind sie Gugis.  
 Otos sind entweder Fluzis oder Gugis, aber nicht beides.

Kann man aus diesen Argumenten schließen, dass Otos Ezos sind? Wie sieht die Formel aus, deren Gültigkeit/Nichtgültigkeit zeigen würde, dass die Konsequenzbeziehung gilt/nicht gilt?

## Lösung

Formalisierung:

$F$  ... Otos sind Fluzis.

$E$  ... Otos sind Ezos.

$G$  ... Otos sind Gugis.

$F \vee E$  ... Otos sind Fluzis oder Ezos.

$\neg E \supset G$  ... Wenn Otos keine Ezos sind, dann sind sie Gugis.

$F \not\equiv G$  ... Otos sind entweder Fluzis oder Gugis.

$I(F)$	$I(E)$	$I(G)$	$F \vee E,$	$\neg E \supset G,$	$F \not\equiv G$	$\models_I$	$E$
0	0	0	0	0	0	✓	0
0	0	1	0	1	1	✓	0
0	1	0	1	1	0	✓	1
0	1	1	1	1	1	✓	1 ⇐
1	0	0	1	0	1	✓	0
1	0	1	1	1	0	✓	0
1	1	0	1	1	1	✓	1 ⇐
1	1	1	1	1	0	✓	1

Ja, man kann aus den gegebenen Argumenten schließen, dass Otos Ezos sind. In jeder der beiden Zeilen, in denen die Prämissen alle wahr sind, ist auch die Konklusion wahr. Anders formuliert: Die Formel  $E$  ist eine logische Konsequenz der Prämissen  $F \vee E$ ,  $\neg E \supset G$  und  $F \not\equiv G$ .

*Arbeitsvereinfachung:* Ist in einer Interpretation eine der Prämissen falsch oder die Konklusion wahr, müssen die übrigen Formeln nicht mehr ausgewertet werden, da die Beziehung  $\models_I$  dann bereits erfüllt ist. Umgekehrt kann man die Erstellung der Tabelle abbrechen, sobald man eine Interpretation  $I$  findet, für die  $\models_I$  nicht gilt.

Beginnt man in dieser Aufgabe die Auswertung mit der Konklusion, müssen wir den Wert der Prämissen nur für die Interpretationen bestimmen, bei denen  $E$  den Wert 0 besitzt. Weiters kann man mit dem Auswerten der Prämissen in einer Zeile aufhören,

sobald eine Prämisse den Wert 0 besitzt.

$I(F)$	$I(E)$	$I(G)$	$F \vee E, \neg E \supset G, F \neq G \models_I E$		
0	0	0	0		✓ 0
0	0	1	0		✓ 0
0	1	0			✓ 1
0	1	1			✓ 1
1	0	0	1	0	✓ 0
1	0	1	1	1	0 ✓ 0
1	1	0			✓ 1
1	1	1			✓ 1

Formel zur Konsequenzbeziehung:  $E$  ist genau dann eine logische Konsequenz der Formeln  $F \vee E$ ,  $\neg E \supset G$  und  $F \neq G$ , wenn die Formel

$$((F \vee E) \wedge (\neg E \supset G) \wedge (F \neq G)) \supset E$$

gültig ist.

### Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei  $f$  folgende dreistellige Funktion.

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$	$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$
1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1

Stellen Sie  $f$  durch eine Formel in

- (a) disjunktiver
- (b) konjunktiver

Normalform dar.

### Lösung

(a)  $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$

(b)  $(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3)$

## Aufgabe 9 (2 Punkte)

Sei  $F$  die Formel  $A \equiv (B \vee C)$ .

- (a) Bestimmen Sie eine zu  $F$  äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.
- (b) Bestimmen Sie eine zu  $F$  äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

## Lösung

- (a) DNF mittels semantischer Methode:

$A$	$B$	$C$	$A \equiv (B \vee C)$	
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Daraus lässt sich folgende DNF ablesen:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

- (b) KNF mittels algebraischer Methode:

$$\begin{aligned} A \equiv (B \vee C) & & F \equiv G &= (F \supset G) \wedge (G \supset F) \\ &= (A \supset (B \vee C)) \wedge ((B \vee C) \supset A) & F \supset G &= \neg F \vee G \\ &= (\neg A \vee (B \vee C)) \wedge ((B \vee C) \supset A) & F \supset G &= \neg F \vee G \\ &= (\neg A \vee (B \vee C)) \wedge ((\neg(B \vee C) \vee A)) & \neg(F \vee G) &= \neg F \wedge \neg G \\ &= (\neg A \vee B \vee C) \wedge ((\neg B \wedge \neg C) \vee A) & F \vee (G \wedge H) &= (F \vee G) \wedge (F \vee H) \\ &= (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C) \end{aligned}$$

## Aufgabe 10 (4 Punkte)

Flo, Niki und Ali finden sich in einem dunklen und kalten Keller wieder. (Wie sie dorthin kamen, ist eine andere Geschichte.) Der Raum besitzt drei Türen, eine rote, eine blaue und eine grüne, die folgende Inschriften aufweisen.

- Rote Tür: „Pforte in die Freiheit“

- Blaue Tür: „Pforte ins Verderben, falls Grün ins Verderben führt“
- Grüne Tür: „Pforte in die Freiheit, falls Rot ins Verderben führt“

Niki will schon die rote Tür öffnen, da fällt sein Blick auf eine Messingtafel.

Nicht alles ist wahr, nicht alles ist falsch, aber nur ein Weg führt hinaus!

Helfen Sie den Dreien, indem Sie die Hinweise mit Hilfe der Aussagenlogik formalisieren und die Formeln geeignet auswerten. Welche Tür sollten sie wählen?

## Lösung

Wir führen folgende Aussagenvariablen ein.

- $R$  Die rote Tür führt in die Freiheit.
- $B$  Die blaue Tür führt in die Freiheit.
- $G$  Die grüne Tür führt in die Freiheit.

Die Türinschriften lassen sich damit folgendermaßen ausdrücken.

- $I_r = R$  Rot führt in die Freiheit.
- $I_b = \neg B \subset \neg G$  Blau führt ins Verderben, wenn Grün ins Verderben führt.
- $I_g = G \subset \neg R$  Grün führt in die Freiheit, wenn Rot ins Verderben führt.

Für die Hinweise auf der Messingtafel erhalten wir folgende Formeln.

- $H_1 = \neg(I_r \wedge I_b \wedge I_g)$  Nicht alles ist wahr.
- $H_2 = \neg(\neg I_r \wedge \neg I_b \wedge \neg I_g)$  Nicht alles ist falsch.
- $H_3 = (R \wedge \neg B \wedge \neg G) \vee (\neg R \wedge B \wedge \neg G) \vee (\neg R \wedge \neg B \wedge G)$   
Nur ein Weg führt hinaus.

Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen  $R$ ,  $B$  und  $G$ , sodass die Formeln  $H_1$ ,  $H_2$  und  $H_3$  gleichzeitig wahr werden. Zuerst vereinfachen wir die ersten beiden noch.

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \neg(I_r \wedge I_b \wedge I_g) \\
 &= \neg(R \wedge (\neg B \subset \neg G) \wedge (G \subset \neg R)) \\
 &= \neg(R \wedge (\neg B \vee G) \wedge (G \vee R)) \\
 &= \neg(R \wedge (\neg B \vee G)) \\
 &= \neg R \vee (B \wedge \neg G) \\
 H_2 &= \neg(\neg I_r \wedge \neg I_b \wedge \neg I_g) \\
 &= I_r \vee I_b \vee I_g \\
 &= R \vee (\neg B \subset \neg G) \vee (G \subset \neg R) \\
 &= R \vee \neg B \vee G \vee G \vee R \\
 &= R \vee \neg B \vee G
 \end{aligned}$$

Wegen  $H_3$  müssen wir nur jene Variablenbelegungen untersuchen, in denen genau eine der drei Variablen wahr ist. Wir erhalten folgende reduzierte Wahrheitstafel.

$R$	$B$	$G$	$\neg R \vee (B \wedge \neg G)$	$R \vee \neg B \vee G$	$H_3$
1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1

Demnach führt die grüne Tür in die Freiheit.

### Aufgabe 11 (4 Punkte)

Sechs Mitglieder der berüchtigten Panzerknacker-Bande verbüßen nach einem Raubzug eine Haftstrafe. *Babyface Knack* war nicht untätig und hat unter seinem Bett einen Fluchttunnel gegraben. Nun überlegt er, wen er mitnehmen soll.

„Ich muss mindestens eine Person mitnehmen, die die Wärter im Auge behält. *Opa Knack* wird bereits nächste Woche entlassen, er wird daher den Ausbruch nicht riskieren. *Megabyte Knack* und *Karlchen Knack* streiten ständig miteinander, ich nehme sicher nicht beide zusammen mit. *Oma Knack* ist nicht gut zu Fuß, daher wird sie auf *Karlchen Knack* als Stütze bestehen, wenn sie mitkommt. *Schlabber Knack* tut nie das Gleiche wie *Karlchen Knack*; wenn *Karlchen* mitkommt, bleibt er sicher da. *Megabyte Knack* kommt dann und nur dann mit, wenn *Oma Knack* oder *Karlchen Knack* mitkommen.“

- (a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung jeder Aussagenvariablen an.
- (b) Wer begleitet *Babyface* bei seinem Ausbruchsversuch? Begründen Sie Ihre Antwort(en) mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

### Lösung

- (a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

$K$  ... Karlchen Knack kommt mit.  
 $M$  ... Megabyte Knack kommt mit.  
 $O$  ... Oma Knack kommt mit.  
 $P$  ... Opa Knack kommt mit.  
 $S$  ... Schlabber Knack kommt mit.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := K \vee M \vee O \vee P \vee S$	mindestens 1 Komplize
$F_1 := \neg P$	Opa kommt nicht mit
$F_2 := \neg(M \wedge K)$	Megabyte und Karlchen nicht gemeinsam
$F_3 := O \supset K$	wenn Oma, dann Karlchen
$F_4 := K \supset \neg S$	wenn Karlchen, dann nicht Schlabber
oder $F_4 := K \not\equiv S$	Karlchen und Schlabber verhalten sich gegenteilig.
$F_5 := M \equiv (O \vee K)$	Megabyte genau dann, wenn Oma oder Karlchen

- (b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen  $K, M, O, P$  und  $S$ , in denen die Formeln  $F_0, \dots, F_5$  wahr sind. Wegen Formel  $F_1$  betrachten wir nur Interpretationen, in denen  $P$  falsch ist. Für eine vollständige Argumentation muss für jede Interpretation entweder gezeigt werden, dass eine Formel falsch ist, oder aber, dass alle Formeln wahr sind. Wenn wir also in einer Zeile einen 0-Eintrag gefunden haben, müssen wir den Rest der Zeile nicht mehr betrachten. Die folgende Tabelle enthält alle 0-Einträge.

$K$	$M$	$O$	$P$	$S$	$F_0$	$\neg P$	$\neg(M \wedge K)$	$O \supset K$	$K \supset \neg S$	$M \equiv (O \vee K)$	
0	0	0	0	0	0						
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	✓
0	0	1	0	0			0			0	
0	0	1	0	1			0			0	
0	1	0	0	0						0	
0	1	0	0	1						0	
0	1	1	0	0			0				
0	1	1	0	1			0				
1	0	0	0	0						0	
1	0	0	0	1					0	0	
1	0	1	0	0						0	
1	0	1	0	1					0	0	
1	1	0	0	0			0				
1	1	0	0	1			0		0		
1	1	1	0	0			0				
1	1	1	0	1			0		0		

Babyface wird von Schlabber begleitet.

## Aufgabe 12 (3 Punkte)

SAT-Solver sind Programme, die als Eingabe eine *einzig*e Formel in *konjunktiver Normalform* verarbeiten und diese auf Erfüllbarkeit testen. Als Ausgabe liefern sie die Information „erfüllbar“, bzw. „unerfüllbar“. Im ersten Fall wird eine erfüllende Variablenbelegung als Nachweis für die Erfüllbarkeit ausgegeben.

Wie lässt sich ein SAT-Solver verwenden um festzustellen, ob eine Formel  $F$  von zwei Formeln  $G$  und  $H$  subsumiert wird? Man sagt, dass eine Formel  $F$  von Formeln  $G_1, \dots,$

$G_n$  subsumiert wird, wenn in jeder Variablenbelegung, in der die Formeln  $G_1, \dots, G_n$  wahr sind, auch die Formel  $F$  wahr ist. Intuitiv gesprochen steuert Formel  $F$  in diesem Fall keine neue Information bei. Beschreiben Sie alle erforderlichen Schritte, von der Aufbereitung der Fragestellung für den SAT-Solver bis zur Interpretation des Ergebnisses des SAT-Solvers. Was bedeutet es in Ihrer Methode, wenn der SAT-Solver eine erfüllende Variablenbelegung findet?

### Lösung

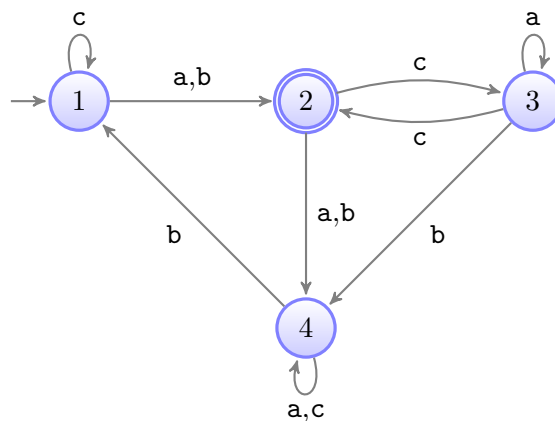
Es gilt:

- $F$  wird von  $G$  und  $H$  subsumiert
- genau dann, wenn die logische Konsequenz  $G, H \models F$  gilt;
- genau dann, wenn die Formel  $(G \wedge H) \supset F$  gültig ist;
- genau dann, wenn die Formel  $\neg((G \wedge H) \supset F)$  unerfüllbar ist;
- genau dann, wenn die Formel  $G \wedge H \wedge \neg F$  unerfüllbar ist.

Um also festzustellen, ob  $F$  von  $G$  und  $H$  subsumiert wird, wandeln wir die Formel  $G \wedge H \wedge \neg F$  in konjunktive Normalform um und übergeben sie dem SAT-Solver. Liefert dieser „unerfüllbar“, wird  $F$  von  $G$  und  $H$  subsumiert. Liefert der SAT-Solver hingegen „erfüllbar“, wird  $F$  nicht subsumiert; die vom SAT-Solver gelieferte erfüllende Wahrheitsbelegung stellt ein Gegenbeispiel dar: in dieser Interpretation sind die Formeln  $G$  und  $H$  wahr,  $F$  aber falsch.

### Aufgabe 13 (3 Punkte)

Sei  $\mathcal{A}$  der folgende endliche Automat.



- (a) Geben Sie alle Wörter an, die aus maximal drei Zeichen bestehen und von  $\mathcal{A}$  akzeptiert werden. (Das sollten acht Wörter sein.)
- (b) Berechnen Sie schrittweise  $\delta^*(1, \text{cbcac})$ .



- (c) Spezifizieren Sie  $\mathcal{A}$  in tabellarischer Form. Handelt es sich bei  $\mathcal{A}$  um einen deterministischen oder indeterministischen Automaten?

### Lösung

- (a) Die von  $\mathcal{A}$  akzeptierten Wörter mit einer Länge von maximal drei Zeichen sind **a, b, ca, cb, acc, bcc, cca** und **ccb**.

$$\begin{aligned}
 (b) \delta^*(1, cbcac) &= \delta^*(\delta(1, c), bcac) \\
 &= \delta^*(1, bcac) \\
 &= \delta^*(\delta(1, b), cac) \\
 &= \delta^*(2, cac) \\
 &= \delta^*(\delta(2, c), ac) \\
 &= \delta^*(3, ac) \\
 &= \delta^*(\delta(3, a), c) \\
 &= \delta^*(3, c) \\
 &= \delta^*(\delta(3, c), \varepsilon) \\
 &= \delta^*(2, \varepsilon) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

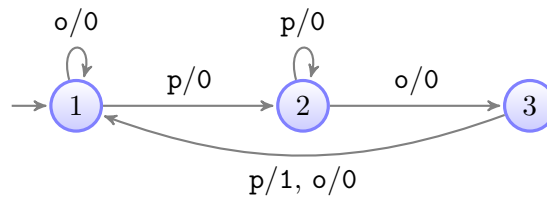
- (c)  $\mathcal{A} = \langle \{1, 2, 3, 4\}, \{a, b, c\}, \delta, 1, \{2\} \rangle$ , wobei die Übergangsfunktion  $\delta$  durch folgende Tabelle definiert ist:

$\delta$	a	b	c
1	2	2	1
2	4	4	3
3	3	4	2
4	4	1	4

$\mathcal{A}$  ist ein deterministischer Automat, da der momentane Zustand und die nächste Eingabe immer eindeutig den Folgezustand bestimmen. Das äußert sich in der Tabelle dadurch, dass jeder Eintrag genau einen Zustand enthält.

### Aufgabe 14 (4 Punkte)

Sei  $\mathcal{A}$  der folgende Mealy-Automat.



- (a) Geben Sie die Ausgabe zur Eingabe **ppoopopo** an.  
 (b) Berechnen Sie schrittweise  $\delta^*(1, oopopo)$  und  $\gamma^*(1, oopopo)$ .  
 (c) Beschreiben Sie die Übersetzungsfunktion  $[\mathcal{A}]$ .

## Lösung

(a)  $\gamma^*(1, \text{ppoopopo}) = 00000010$

(b)  $\delta^*(1, \text{oopopo}) = \delta^*(\delta(1, \text{o}), \text{opopo})$        $\gamma^*(1, \text{oopopo}) = \gamma(1, \text{o}) \cdot \gamma^*(\delta(1, \text{o}), \text{opopo})$   
     $= \delta^*(1, \text{opopo})$                                        $= 0 \cdot \gamma^*(1, \text{opopo})$   
     $= \delta^*(\delta(1, \text{o}), \text{popo})$                                $= 0 \cdot \gamma(1, \text{o}) \cdot \gamma^*(\delta(1, \text{o}), \text{popo})$   
     $= \delta^*(1, \text{popo})$      $= 0 \cdot 0 \cdot \gamma^*(1, \text{popo})$   
     $= \delta^*(\delta(1, \text{p}), \text{opo})$                                $= 00 \cdot \gamma(1, \text{p}) \cdot \gamma^*(\delta(1, \text{p}), \text{opo})$   
     $= \delta^*(2, \text{opo})$      $= 00 \cdot 0 \cdot \gamma^*(2, \text{opo})$   
     $= \delta^*(\delta(2, \text{o}), \text{po})$                                $= 000 \cdot \gamma(2, \text{o}) \cdot \gamma^*(\delta(2, \text{o}), \text{po})$   
     $= \delta^*(3, \text{po})$      $= 000 \cdot 0 \cdot \gamma^*(3, \text{po})$   
     $= \delta^*(\delta(3, \text{p}), \text{o})$                                $= 0000 \cdot \gamma(3, \text{p}) \cdot \gamma^*(\delta(3, \text{p}), \text{o})$   
     $= \delta^*(1, \text{o})$      $= 0000 \cdot 1 \cdot \gamma^*(1, \text{o})$   
     $= \delta^*(\delta(1, \text{o}), \varepsilon)$                                $= 00001 \cdot \gamma(1, \text{o}) \cdot \gamma^*(\delta(1, \text{o}), \varepsilon)$   
     $= \delta^*(1, \varepsilon)$      $= 00001 \cdot 0 \cdot \gamma^*(1, \varepsilon)$   
     $= 1$      $= 000010 \cdot \varepsilon = 000010$

(c) Der Mealy-Automat ist ein pop-Detektor: Immer wenn in der Eingabe die Symbolfolge pop auftritt, wird das Symbol 1 ausgegeben, sonst 0.

## Aufgabe 15 (4 Punkte)

Im Film „Die Hard: With a Vengeance“ aus dem Jahr 1995 müssen John McClane (gespielt von Bruce Willis) und Zeus Carver (gespielt von Samuel L. Jackson) eine Bombe entschärfen, indem sie innerhalb von fünf Minuten mit Hilfe einer 3- und einer 5-Gallonen-Flasche exakt 4 Gallonen Wasser abmessen und auf eine Waage stellen.<sup>1</sup> Dabei steht ihnen ein Brunnen zur Verfügung, aus dem sie beliebig Wasser nachfüllen können.<sup>2</sup>

- (a) Welche Informationen sind notwendig, um den für das Problem relevanten Teil des Gesamtsystems (bestehend aus den Flaschen, der Bombe, der Waage, McClane, Carver, dem Brunnen, ...) zu beschreiben? Wie lässt sich der momentane Zustand des Systems kompakt beschreiben? Schätzen Sie die Zahl der möglichen Zustände ab. Was ist der Startzustand, was sind die Endzustände?
- (b) Legen Sie die möglichen Aktionen fest, die zu einem Zustandswechsel führen können.
- (c) Geben Sie einen endlichen Automaten graphisch oder tabellarisch an, der das Systemverhalten vollständig beschreibt.
- (d) Lesen Sie an Ihrem Automaten eine Lösung ab.

<sup>1</sup>Gallonen, engl. *gallons*, sind ein Volumenmaß. Eine US-amerikanische Gallone entspricht etwa 3,8 Litern.

<sup>2</sup>Filmausschnitt siehe [https://www.youtube.com/watch?v=BVtQNK\\_ZUJg](https://www.youtube.com/watch?v=BVtQNK_ZUJg)

## Lösung

- (a) Die anfänglich leeren Flaschen müssen solange mit Wasser gefüllt, ineinander umgefüllt und entleert werden, bis die größere Flasche (nur diese ist groß genug) genau 4 Gallonen Wasser enthält. Der momentane Zustand bei der Suche nach der Lösung lässt sich durch den momentanen Füllstand der beiden Flaschen beschreiben. Da durch Um- und Befüllen nur ganzzahlige Füllstände exakt hergestellt werden können, lässt sich der momentane Zustand durch eine Zahl mit zwei Ziffern,  $mn$ , beschreiben, wobei  $m \in \{0, 1, 2, 3\}$  den Füllstand der kleinen und  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  jenen der großen Flasche angibt. Beispielsweise beschreibt 23 jenen Zustand, in dem die kleine Flasche zwei und die große Flasche drei Gallonen Wasser enthält. Insgesamt kann es daher höchstens  $4 \cdot 6 = 24$  Zustände geben, von denen aber möglicherweise nicht alle erreichbar sind. Im Startzustand 00 sind beide Flaschen leer. Im Endzustand enthält die große Flasche 4 Gallonen, somit kommen 04, 14, 24 und 34 als Endzustände in Frage.
- (b) Da die Wassermengen exakt abgemessen werden müssen, stehen folgende Operationen zur Verfügung: vollkommenes Entleeren einer Flasche, vollkommenes Befüllen einer Flasche mit Hilfe des Brunnens, und das Umleeren des Inhalts einer Flasche in die andere, bis entweder die erste Flasche leer oder die zweite Flasche voll ist. Als Kurzbezeichnungen wählen wir  $3\downarrow$  bzw.  $5\downarrow$  für das Entleeren der 3- bzw. 5-Gallonen-Flasche,  $3\uparrow$  bzw.  $5\uparrow$  für das Befüllen sowie  $3\rightarrow 5$  bzw.  $5\rightarrow 3$  für das Umfüllen von einer in die andere Flasche.
- (c) Ausgehend vom Startzustand bestimmen wir für jede mögliche Aktion den Folgezustand und setzen dann mit diesen Folgezuständen fort, und zwar so lange, bis wir keine neuen Zustände mehr erreichen. Wir stellen den Automaten tabellarisch dar.

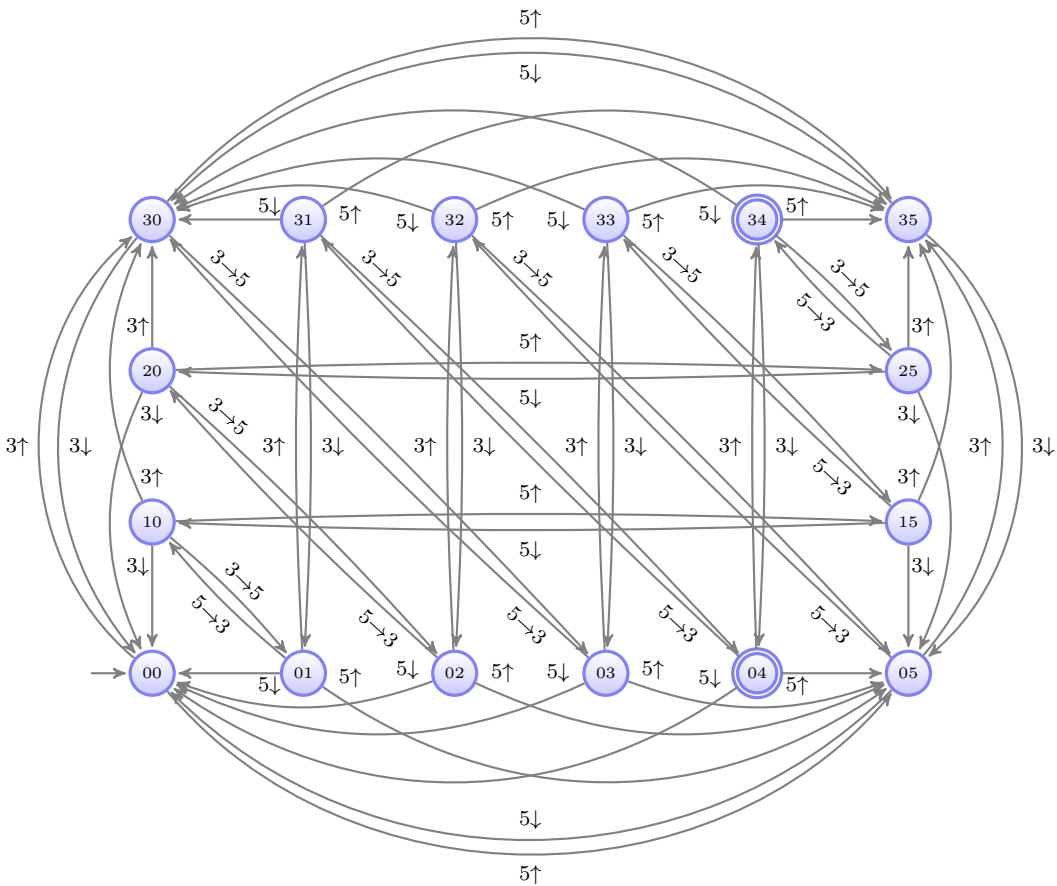
$\delta$	$3\uparrow$	$5\uparrow$	$3\downarrow$	$5\downarrow$	$3\rightarrow 5$	$5\rightarrow 3$
AZ 00	30	05	00	00	00	00
30	30	35	00	30	03	30
05	35	05	05	00	05	32
35	35	35	05	30	35	35
03	33	05	03	00	03	30
32	32	35	02	30	05	32
33	33	35	03	30	15	33
02	32	05	02	00	02	20
15	35	15	05	10	15	33
20	30	25	00	20	02	20
10	30	15	00	10	01	10
25	35	25	05	20	25	34
01	31	05	01	00	01	10
EZ 34	34	35	04	30	25	34
31	31	35	01	30	04	31
EZ 04	34	05	04	00	04	31

Durch die Angabe des Start- und der Endzustände legt die Tabelle den Automaten vollständig fest. Dasselbe lässt sich als 5-Tupel spezifizieren:

$$\langle \{00, 01, 02, 03, 04, 05, 10, 15, 20, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}, \\ \{3\uparrow, 5\uparrow, 3\downarrow, 5\downarrow, 3\rightarrow 5, 5\rightarrow 3\}, \delta, 00, \{04, 34\} \rangle$$

Dabei ist die Übergangsfunktion  $\delta$  wie in der Tabelle angegeben definiert.

Der Automat lässt sich auch graphisch darstellen. Der Übersichtlichkeit wegen vereinbaren wir, dass fehlende Übergänge bei einem Zustand wieder in denselben Zustand führen, also Schleifen bilden. (In der Tabelle sind das die Einträge in kleiner Schrift.)



- (d) Grundsätzlich akzeptiert der Automat unendlich viele Wörter; jedes Wort stellt eine Lösung dar. Zum Entschärfen der Bombe eignet sich vermutlich die kürzeste am besten:  $5\uparrow 5\rightarrow 3 3\downarrow 5\rightarrow 3 5\uparrow 5\rightarrow 3$ . Dabei werden die Zustände 00, 05, 32, 02, 20, 25 und 34 durchlaufen. Die beiden Helden müssen also die folgenden Schritte durchführen.

1. Die große Flasche mit Wasser aus dem Brunnen füllen.

2. Die kleine Flasche aus der großen mit Wasser füllen.
3. Die kleine Flasche entleeren.
4. Das in der großen Flasche verbliebene Wasser in die kleine Flasche umfüllen.
5. Die große Flasche mit Wasser aus dem Brunnen füllen.
6. Die kleine Flasche aus der großen mit Wasser füllen.

Die große Flasche enthält nun genau 4 Gallonen Wasser.