■ Bsp 496:

Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1} = 2\,a_n + 4\,b_n$, $b_{n+1} = 3\,a_n + 3\,b_n$ für $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = 1999$ und $b_0 = 1999$

$$a_{n+1} = 2\,a_n + 4\,b_n$$
$$b_{n+1} = 3\,a_n + 3\,b_n$$

■ Lösen des Gleichungssystemes

Wir erhalten nach kurzer Umformung

$$A[x] - a0 = 2\,x\,A[x] + 4\,x\,B[x]$$
$$B[x] - b0 = 3\,x\,A[x] + 3\,x\,B[x]$$

Da a0 und b0 gleich sind, kann ich sie auch gleich setzen. Sei $a_0 = b_0 = a$

$$A[x] - 2\,x\,A[x] - 4\,x\,B[x] = a$$

$$B[x] = \frac{3\,x\,A[x] + a}{1 - 3\,x} \Big|_{\text{Aus Gleichung (2)}}$$

$$A[x] - 2\,x\,A[x] - \frac{12\,x^2\,A[x]}{1 - 3\,x} = a + \frac{4\,a\,x}{1 - 3\,x}$$

$$A[x]\,(-6\,x^2 - 5\,x + 1) = a\,(1 - 3\,x) + 4\,a\,x = a + ax = a\,(1 + x)$$

$$A[x]\,(1 - 6\,x)\,(1 + x) = a\,(1 + x)$$

■ Bestimmen des Koeffizienten von $[x^n]$ für A[x], B[x]

$$A[x] = \frac{a}{1 - 6\,x} = a\sum_{n=0}^{\infty} 6\,x^n$$

$$\Rightarrow [x^n]\,A[x] = a\,6^n = a_n$$

$$B[x] = \frac{3\,x\,A[x] + a}{1 - 3\,x} = \frac{3\,a\,x}{(1 - 3\,x)\,(1 - 6\,x)} + \frac{a}{1 - 3\,x} = \frac{3\,ax + a - 6\,ax}{(1 - 3\,x)\,(1 - 6\,x)} = \frac{a}{1 - 6\,x}$$

$$\Rightarrow [x^n]\,B[x] = a6^n = b_n$$

■ Auswerten der Anfangsbedinungen $a_0 = b_0 = 1999$

$$a = 1999$$

$$a_n = 1999 * 6^n$$

$$b_n = 1999 * 6^n$$

Bsp 498:

Man untersuche, welche o, O und ~ Beziehungen zwischen den Folgen a_n, b_n und c_n bestehen.

$$a_n = 2n,\ b_n = \frac{n^2}{2},\ c_n = \frac{3n^4}{6n^2+1}$$

Untersuchung der O Beziehungen:

$a_n = O[b_n] \Leftrightarrow$ Wenn ein $C > 0$, $C \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ existiert und $|a_n| \leq C\, b_n$
Des weiteren wissen wir, das die Relation $a_n = O[b_n]$ transitiv und symetrisch ist.

an = O[bn] ?

$$\frac{4}{n} \leq C$$

$C = 4,\ N = 1$

$\Rightarrow an = O[b_n]$

bn = O[cn] ?

$$\frac{\frac{n^2}{2}}{\frac{3n^4}{6n^2+1}} = \frac{n^2}{2}\,\frac{6n^2+1}{3n^4} = \frac{6n^4+n^2}{6n^4} \leq \frac{7n^4}{6n^4} \leq C$$

$C = \frac{7}{6},\ N = 1$

an = O[cn] ?

$an = O[bn] \wedge bn = O[cn] \Rightarrow an = O[cn]$

Untersuchung der o,~ Beziehungen

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$a_n = o[b_n] \Leftrightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = 0$$

a_n, b_n

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{4}{n} = 0$$

$\Rightarrow a_n = o[b_n]$

b_n, c_n

$$\lim \frac{b_n}{c_n} = \lim \frac{\frac{n^2}{2}}{\frac{3n^4}{6n^2+1}} = \lim \frac{6n^2+1}{6n^2} = 1$$

$\Rightarrow b_n \sim c_n$

Aus $a_n = o[b_n]$, $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n = o[c_n]$

■ Tabelle für die Beziehungen

	a_n	b_n	c_n
a_n	0, ~	0, o	0, o
b_n		0, ~	0, ~
$c_{\square}$		0, ~	0, ~

■ Bsp 500:

Zeigen Sie die folgenden asymptotischen Beziehungen für die Anzahl der Kombinationen mit bzw. ohne Wiederholungen für festes k und $n \to \infty$

$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}^{k-\text{Faktoren}}}{k!}$$

Wir wissen folgendes. Ein "normiertes" Polynom vom Grad k hat folgende Form

$$x^k + \alpha_0\, x^{k-1} + \ldots + \alpha_1\, x + \alpha_0 = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_i)$$

Ich kann also für die oberen k - Faktoren schreiben

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \prod_{j=1}^{k} (n - \lambda_i) \text{ mit } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_k = k-1$$

Ich kann nun dieses Polynom auch wie folgt anschreiben, da ich n^k auf jedenfall kenne.

$$\prod_{j=1}^{k} (n - \lambda_i) = n^k + P_{\le k-1}[n]$$

Also den Term n^k rausnehmen, und ein mir unbekanntes Polynom vom Grad $\le k - 1$ ansetzen, dessen Koeffizienten ich aber nicht weiß. Wenn die beiden asymptotisch gleich sind, muss gelten.

$$a_n = \frac{n^k + P_{k-1}[n]}{k!},\quad b_n = \frac{n^k}{k!}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n^k + P_{k-1}[n]}{k!} \frac{k!}{n^k} = \lim \frac{n^k + P_{k-1}[n]}{n^k} = 1 + \lim \frac{P_{k-1}[n]}{n^k}$$

Wir wissen, dass $\lim \frac{P_q[n]}{Q_r[n]} = 0$ ist für Grad $P_q[n] = q > \text{Grad } Q_r[n] = r$.

Das Polynom $P_{k-1}[n]$ hat den Grad $\le k - 1$, n^k den Grad k. Daher gilt :

$$\lim \frac{P_{k-1}[n]}{n^k} = 0$$

$$\Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = 1 + 0 = 1$$

■ Bsp 502:

Zeigen sie die folgende asymptotische Beziehung für die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen für festes k und n→∞
$[n_k] = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = n^k + O[n^{k-1}]$

Wieder der gleiche Trick wie vorher

$$n(n-1)\ldots(n-k+1) - n^k = O[n^{k-1}]$$

Mit :

$$n(n-1)\ldots(n-k+1) = n^k + P_{\leq k-1}[n]$$

$$n^k + P_{\leq k-1}[n] - n^k \leq Cn^{k-1}$$

$$|P_{\leq k-1}[n]| \leq C\, n^{k-1}$$

$$P_{\leq k-1}[n] = \alpha_{k-1}\, n^{k-1} + \alpha_{k-2}\, n^{k-2} + \ldots + \alpha_1\, n + \alpha_0 \leq (|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|)\, n^{k-1}\, |_{n\geq 1}$$

$$\frac{(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|)\, n^{k-1}}{n^{k-1}} = C$$

$$\Rightarrow C = (|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|),\quad N = 1$$

■ Bsp 503

Man zeige mit Hilfe der Stirlingschen Approximationsformel $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$
$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$$n!\,n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n$$

$$(2n)! \sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} = 2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}$$

$$\frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{4^n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} = 4^n \sqrt{\frac{4\pi n}{(2\pi n)^2}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$