Analysis UE 11*

Styll Patrick

15. Juni 2022

1 - Beispiel 346

Man berechne die Ableitung von $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ im Punkt $P_0(3,2)$

(a) in Richtung der Koordinatenachsen,

(b) in Richtung von $(-1,-1)$, sowie

(c) in Richtung von $grad(f)$.

$$f_x = 2x$$
$$f_y = 8y$$
$$gradf(x,y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 8y \end{bmatrix}$$
$$gradf(3,2) = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$$

a) In x- und y-Richtung betrachten:
x-Richtung: $gradf(x,y) = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 6$
y-Richtung: $gradf(x,y) = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 16$

b) Hierzu normieren wir zuerst den erhaltenen Richtungsvektor und erhalten:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{-6}{\sqrt{2}} - \frac{16}{\sqrt{2}} = -\frac{22}{\sqrt{2}}$$

*__Disclaimer:__ Entschuldigt eventuell passiv aggressive Passagen - dieses Aufgabenblatt wurde (nach einem EVC-Test!) von 20 Uhr Abend bis 7 Uhr Früh auf etwa 400mg Koffein gemacht. Gemäß Tutor sollte aber alles passen. Fazit: I wü nimma. Liebe Grüße.

c) Wir normieren den Gradienten und erhalten:

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{292}} \\ \frac{16}{\sqrt{292}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{36}{\sqrt{292}} + \frac{256}{\sqrt{292}} = \frac{292}{\sqrt{292}}$$

2 - Beispiel 348

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & falls \quad y-1=(x-1)^2>0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist an der Stelle $(1,1)$ unstetig, aber an dieser Stelle existieren alle Richtungsableitungen und sind identisch 0.

Prinzipiell kann alles mögliche in x und y eingesetzt werden. Setzen wir also eine Folge ein, welche gegen $(1,1)$ konvergiert. Bei der Wahl eines y-Wertes ist Vorsicht geboten - dieser ist gemäß der obigen Formel vom x-Wert abhängig. Wir formen um und erhalten $y = x^2 - 2x + 2$. Nun schauen wir uns um eine Folge um, welche gegen $(1,1)$ konvergiert, dessen Funktionswert aber nicht gleich 1 ist. Wir finden:

$$(1+\frac{1}{n}, g(1+\frac{1}{n}))$$

Hierbei konvergiert x trivialerweise gegen 1. y ebenso, da gilt: $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} + 2 = 1 + 0 - 2 + 2$.
Dennoch ist aber der Funktionswert nicht gleich 0, da wir da x und y einen beliebig kleinen Wert ε (in unserem Falle $\frac{1}{n}$) über 1 liegen. Somit gilt, dass der Funktionswert in diesem Falle gleich 1, und nicht gleich 0 ist, wodurch die Funktion also unstetig ist.

Betrachten wir nun die Richtungsableitungen - diese kann man sich leicht durch den Gradienten herleiten. Es gilt $f(1,1) = 0$, wodurch die partiellen Ableitungen $f_x = 0$ und $f_y = 0$ sind. Als Gradienten ergibt uns dies trivialerweise $gradf = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Somit haben wir also schon die Ableitung.
Jetzt fehlt noch die Richtung - wir wollen alle möglichen Richtungen abdecken, was also heißt, dass wir einen beliebig wählbaren Vektor v heranziehen werden. Wir rechnen also:

$$gradf \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Somit haben wir gezeigt, dass alle Richtungableitungen identisch 0 sind.

3 - Beispiel 351

Für die Funktion $f(x, y) = x \ln(1 + xy)$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Formel für das quadratische Taylorpolynom:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+$$

$$\frac{1}{2!}(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2)$$

Zunächst bestimmen wir die benötigten partiellen Ableitungen und setzen den verlangten Punkt $(1, 0)$ ein:

$$f_x = \ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \qquad f_x(1,0) = 0$$

$$f_y = \frac{x^2}{1+xy} \qquad f_y(1,0) = 1$$

$$f_{xx} = \frac{y}{1+xy} + \frac{y}{(1+xy)^2} \qquad f_{xx}(1,0) = 0$$

$$f_{xy} = \frac{x}{1+yx} + \frac{x}{(1+yx)^2} \qquad f_{xy}(1,0) = 2$$

$$f_{yy} = -\frac{x^3}{(1+xy)^2} \qquad f_{yy}(1,0) = -1$$

Jetzt fehlt nurmehr, in die Formel einzusetzen. Das ergibt extrem viel, das einfach weggekürzt werden kann - insgesamt ergibt sich:

$$0 + 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) + \frac{1}{2}(0 \cdot (x-1)^2 + 2(x-1)(y-0) - 1(y-0)^2)$$

$$f(x,y) = 2xy - y - \frac{y^2}{2}$$

4 - Beispiel 364

Gegeben sei die quadratische Form $q(x) = q(x,y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2$ mit $b \in \mathbb{R}$. Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix A, sodass $q(x) = xAx^T$? Für welche werte von b ist die Form positiv definit?

(i) Zunächst berechnen wir die symmetrische Matrix - eine symmetrische Matrix ist dadurch ausgezeichnet, dass sie transponiert derselben ursprünglichen Matrix entspricht. Wir gehen dies nun so an, dass wir die Haupt-/Nebendiagonalen der Matrix auf die gleichen Werte a_1, a_2 setzen. Wir setzen jetzt aber nur voraus, dass nur bei der Nebendiagonalen alle Werte gleich sein müssen, da sie in unserem Falle genau dann symmetrisch ist. Das bedeutet konkret jetzt nur, dass wir für a_1 auch unterschiedliche einsetzen können. Wir formen also um:

$$(x,y) \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4x^2 + 2bxy + 25y^2$$

$$\vdots$$

$$(x,y) \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} xa_1 + ya_2 & xa_2 + ya_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2a_1 + xya_2 + xya_2 + y^2a_1$$

$$x^2a_1 + 2xya_2 + y^2a_1$$

Wenn wir dies mit der ursprünglichen Form q vergleichen, so sehen wir, dass wir a_1 variabel machen können, und $a_2 = b$ setzen können. Wir erhalten:

$$\begin{bmatrix} 4 & b \\ b & 25 \end{bmatrix}$$

(ii) Wir zeigen nun, auch anhand der symmetrischen Matrix A, wann die Funktion positiv definit ist. Dafür benutzen wir das Hauptminorenkriterium, wobei wir zuerst die Hauptminoren der Matrix selbst bestimmen (Zwiebelprinzip), die Determinanten anhand des Satzes von Sarrus berechnen, und anschließend die Vorzeichen der erhaltenen Ergebnisse betrachten - sollten alle Werte > 0 sein, so ist die Matrix positiv definit.

a) Hauptminoren bestimmen von A:
erste Hauptminore: 4
zweite Hauptminore: A

b) Determinanten und Vorzeichen bestimmen:
$det\ 4 = 4 > 0$
$det\ A = 4 \cdot 25 - b^2$
$\Leftrightarrow 100 - b^2 > 0$
$\Leftrightarrow 100 > b^2$
$\Leftrightarrow 10 > |b|$

Wir sehen: Alle Vorzeichen der Hauptminoren sind für $b \in (-10, 10)$ größer als 0, wodurch die Matrix für genau diese Werte von b positiv definit ist.

5 - Beispiel 384

Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist.

$$f(x,y) = \cos x + y + \sin x + \sin y \qquad f\ddot{u}r \quad 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$$

Definition - lokale Extrema: Die Funktion f habe in x ein relatives Extremum und sei darüber hinaus in x partiell differenzierbar. Dann verschwinden in x alle partiellen Ableitungen, d.h. $gradf(x) = 0$.

Zunächst betrachten wir die partiellen Ableitungen der gegebenen Funktion.

$$f_x = -\sin(x+y) + \cos x$$
$$f_y = -\sin(x+y) + \cos y$$

Es fällt auf, dass beide diese Formeln mehr oder weniger gleich sind - dies können wir zu unserem Vorteil nutzen, da wir ja $f_x = f_y = 0$ erzielen wollen.

$$f_x = 0 = -\sin(x+y) + \cos x$$
$$\sin(x+y) = \cos x$$

Und analog:

$$f_y = 0 = -\sin(x+y) + \cos y$$
$$\sin(x+y) = \cos y$$

So ergibt sich also:

$$\cos x = \sin(x+y) = \cos y$$
$$x = y$$

Mit dem Wissen, dass $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ setzen wir dies in beide Gleichungen ein:

$$\sin 2x = \cos x$$
$$2\sin x\cancel{\cos x} = \cancel{\cos x}$$
$$2\sin x = 1$$
$$\sin x = \frac{1}{2}$$
$$x = \arcsin\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{6}$$

Analog funktioniert dies bei ...

$$\sin 2y = \cos y$$
$$\vdots$$
$$y = \frac{\pi}{6}$$

Somit haben wir also ein Extremum am Punkt $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$.

Diese Strategie können wir wiederum einsetzen, um ein weiteres Extremum zu finden - immerhin wissen wir ja, dass der Cosinus dem Sinus entspricht, lediglich um $\frac{\pi}{2}$ verschoben - es gilt also $\cos x = \sin x + \frac{\pi}{2}$. Dies setzen wir ein und analysieren wieder beide Fälle:

$$\cos x = \sin{(x + y)}$$
$$\sin{(x + \frac{\pi}{2})} = \sin{(x + y)}$$
$$x + \frac{\pi}{2} = x + y$$
$$y = \frac{\pi}{2}$$

Analog funktioniert dies bei ...

$$\cos y = \sin{(x + y)}$$
$$y + \frac{\pi}{2} = x + y$$
$$x = \frac{\pi}{2}$$

Somit ist also auch $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein Extremum.

Wo könnten aber sonst noch Extrema sein? Immerhin haben wir mit $gradf = 0$ nur das Innere des Intervalls betrachtet, uns fehlt also noch einiges. Sehen wir uns also die Ränder des gegebenen Intervalls an, indem wir immer einen Wert fixieren, und den anderen variabel lassen - dieser kann dann werte zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ annehmen. Es ergeben sich insgesamt 4 Fälle, welche wir abarbeiten werden:

(i) Fixiere $y = \frac{\pi}{2}$, $f(x, \frac{\pi}{2})$:

$$\cos{(x + \frac{\pi}{2})} + \sin x + \sin \frac{\pi}{2}$$
$$\underbrace{\cos{(x + \frac{\pi}{2})}}_{-\sin x} + \sin x + 1 = 1$$

f' :

$$(1)' = 0$$

Die Steigung beträgt 0, wir haben also Extremstellen entlang dieser Geraden.

(ii) Fixiere $x = 0,\ f(0, y)$:

$$\cos y + \sin 0 + \sin y$$

$$\cos y + \sin y$$

$f'(y)$:

$$-\sin y + \cos y$$

Wir setzen die Ableitung gleich 0, um eine potentielle Extremstelle zu erhalten.

$$-\sin y + \cos y = 0$$

$$\cos y = \sin y$$

$$y = \frac{\pi}{4}$$

Wir haben also eine potentielle Extremstelle an $(0, \frac{\pi}{4})$.

(iii) Fixiere $x = \frac{\pi}{2},\ f(\frac{\pi}{2}, y)$:

$$\cos(\frac{\pi}{2} + y) + \sin\frac{\pi}{2} + \sin y$$

$$\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{-\sin y} + \sin y + 1 = 1$$

$f'(y)$:

$$(1)' = 0$$

Die Steigugn beträgt 0, wir haben also Extremstellen entlang dieser Geraden.

(iv) Fixiere $y = 0,\ f(x, 0)$:

$$\cos x + \sin 0 + \sin x$$

$$\cos x + \sin x$$

$f'(x)$:

$$-\sin x + \cos x$$

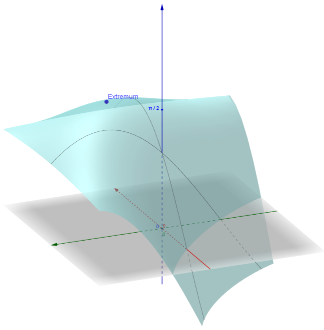
Wir setzen die Ableitung gleich 0, um eine potentielle Extremstelle zu erhalten.

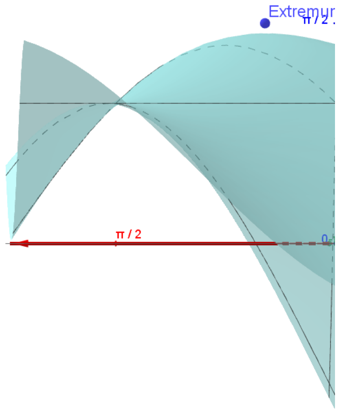
$$-\sin x + \cos x = 0$$

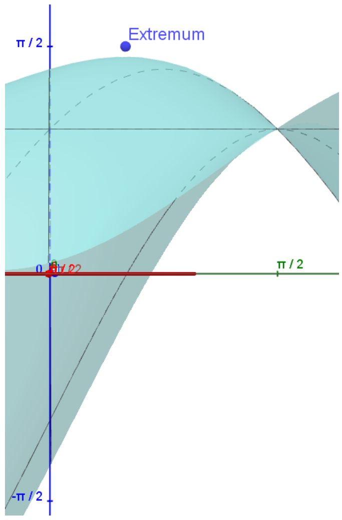
$$\cos x = \sin x$$

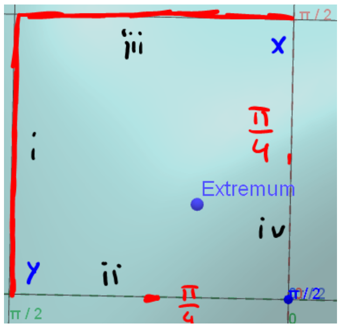
$$x = \frac{\pi}{4}$$

Wir haben prinzipiell nach dem Prinzip gehandelt, wie wir es in den Ausschnitten sehen:









Jetzt fehlt noch zu überprüfen, ob es sich bei den gefundenen Punkten wirklich um Extremstellen oder doch um Sattelpunkte handelt. Hierfür müssen wir die zweiten Ableitungen prüfen, wobei wir anschließend von der Definitheit der Hesse-Matrix Gebrauch werden machen. Die Ableitungen lauten:

$$f_{xx} = -\cos(x+y) - \sin x$$

$$f_{xy} = -\cos(x+y)$$

$$f_{yy} = -\cos(x+y) - \sin y$$

Nun Konstruieren wir daraus die Hesse-Matrix:

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & fyy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(x+y) - \sin x & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\cos(x+y) - \sin y \end{bmatrix}$$

Wir nutzen nun das Hauptminorenkriterium, um die Definitheit zu erhalten - es existieren zwei Hauptminoren, wobei wir die zweite durch die Regel von Sarrus berechnet haben. Ergo:

$$-\cos(x+y)-\sin x$$
$$(-\cos(x+y)-\sin x)(-\cos(x+y)-\sin y)-(\cos(x+y))^2$$

Wir müssen dabei gemäß Hauptminorenkriterium im Kopf behalten: negative Definitheit zeigt ein Maximum, positive Definitheit ein Minimum, und Indefinitheit einen Sattelpunkt. Dabei lässt sich durch verschiedene Reihenfolgen der vorkommenden Vorzeichen auf die Definitheit der Hesse-Matrix schließen.

Wir untersuchen nun die einzelnen potentiellen Extrempunkte, welche wir erhalten haben:

(i) $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$
$$-\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}=-1<0$$
$$\cdots>0$$
Aus dem Muster $-+$ können wir auf negative Definitheit schließen - es liegt also ein relatives Maximum vor.

(ii) $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$$-\cos\pi-\sin\frac{\pi}{2}=1-1=0$$
Hieraus lässt sich direkt auf Undefinitheit und folglich einen Sattelpunkt schließen.

(iii) $(0, \frac{\pi}{4})$
$$-\cos\frac{\pi}{4}-\sin 0<0$$
$$\cdots>0$$
Wiederum negative Definitheit und folglich ein lokales Maximum.

(iv) $(\frac{\pi}{2}, 0)$ analog zu (iii)

(v) An den Rändern $(x, \frac{\pi}{2})$ und $(\frac{\pi}{2}, x)$ sind dann noch lokale Minima zu finden.

6 - Beispiel 386

Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x, y) = 4(x-2)(y^2+10y)+3x^2$.

Zunächst berechnen wir die benötigten partiellen Ableitungen der Funktion f:

$$f_x = 4(y^2+10y)+9x^2$$

$$f_{xx} = 18x$$
$$f_{xy} = 4(2y+10) = 8(y+5)$$
$$f_y = 4(x-2)(2y+10) = 8(x-2)(y+3)$$
$$f_{yx} = 8(y+5)$$
$$f_{yy} = 8(x-2)$$

Na passt. Nutzen wir wieder aus, dass wir nach $gradf = 0$ suchen und setzen $f_y = 0 = 8(x-2)(y+5)$. Hieraus folgt direkt, dass $x = 2 \vee y = 5$. Betrachten wir beide Fälle und setzen zunächst mal $x = 2$ in f_x ein, wobei wir ja $f'_x = 0$ erreichen wollen:

$$4(y^2+10y)+36 = 0$$

$$y^2+10y+9 = 0$$

Durch Anwenden der pq-Formel erhalten wir zwei Lösungen, und zwar $y_1 = -1$ und $y_2 = -9$.
Analog machen wir nun dasselbe mit $y = -5$ und erhalten:

$$4(25-50)+9x^2 = 0$$

$$9x^2-100 = 0$$
$$x^2 - \frac{100}{9}$$

Durch die pq-Formel erhalten wir wiederum $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{100}{9}} = \pm\frac{10}{3}$. Insgesamt haben wir dann folgende Punkte:

$$(2, -9) \qquad (2, -1) \qquad (\frac{10}{3}, -5) \qquad (-\frac{10}{3}, -5)$$

Wir gehen sie schrittweise durch, indem wir immer die Definitheit der zugehörigen Hesse-Matrix $\begin{bmatrix} 18x & 8(y+5) \\ 8(y+5) & 8(x-2) \end{bmatrix}$ berechnen, wobei die Determinante der ersten Hauptminore gleich $18x$ und der zweiten Minore gleich $18x8(x-2)-(8(y+5))^2$. Somit:

(i) ad $(2,-9)$
$18x > 0$
$18x8(x-2) - (8(y+5))^2 < 0$
Somit die Form $+-\dots$ und die Matrix ist indefinit, wodurch an dem Punkt eine Sattelstelle ist.

(ii) ad $(2,-1)$
$18x > 0$
$18x8(x-2) - (8(y+5))^2 < 0$
Somit die Form $+-\dots$ und die Matrix ist indefinit, wodurch an dem Punkt eine Sattelstelle ist.

(iii) ad $(\frac{10}{3},-5)$
$18x > 0$
$18x8(x-2) - (8(y+5))^2 > 0$
Somit die Form $++\dots$ und die Matrix ist positiv definit, wodurch an dem Punkt ein Minimum ist.

(iv) ad $(-\frac{10}{3},-5)$
$18x < 0$
$18x8(x-2) - (8(y+5))^2 > 0$
Somit die Form $-+\dots$ und die Matrix ist negativ definit, wodurch an dem Punkt ein Maximum ist.