Analysis Karigl Prüfungen Theorieteil

15.07.2020

Aufgabe 4

- Definition uneigentliches, unbestimmtes und bestimmtes Integral
- Mittelwertsatz für Integrale definieren und skizzieren

Aufgabe 5

- Differentialgleichungen

06.03.2020

Aufgabe 4

- Definition, notwendige/hinreichende Kriterien, Bsp und Skizzen für:
  - Monotonie
  - Extremwerte
  - Konvexität
  - Wendepunkte

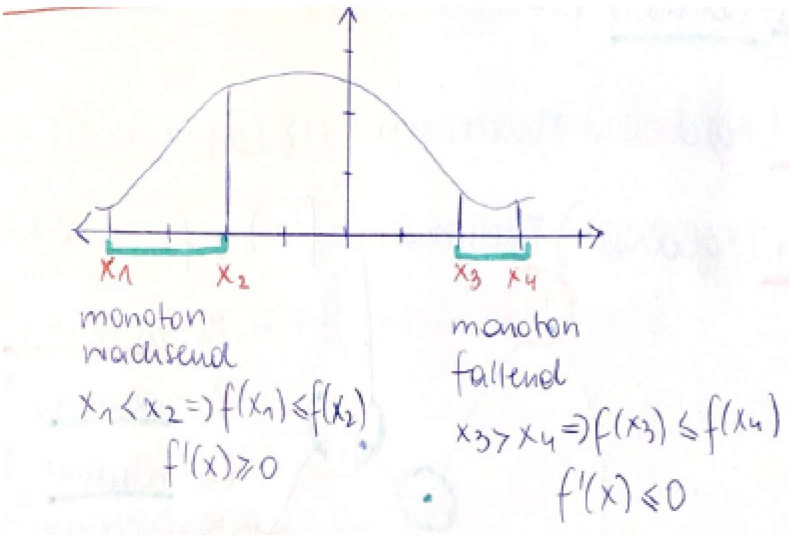
Lösung:

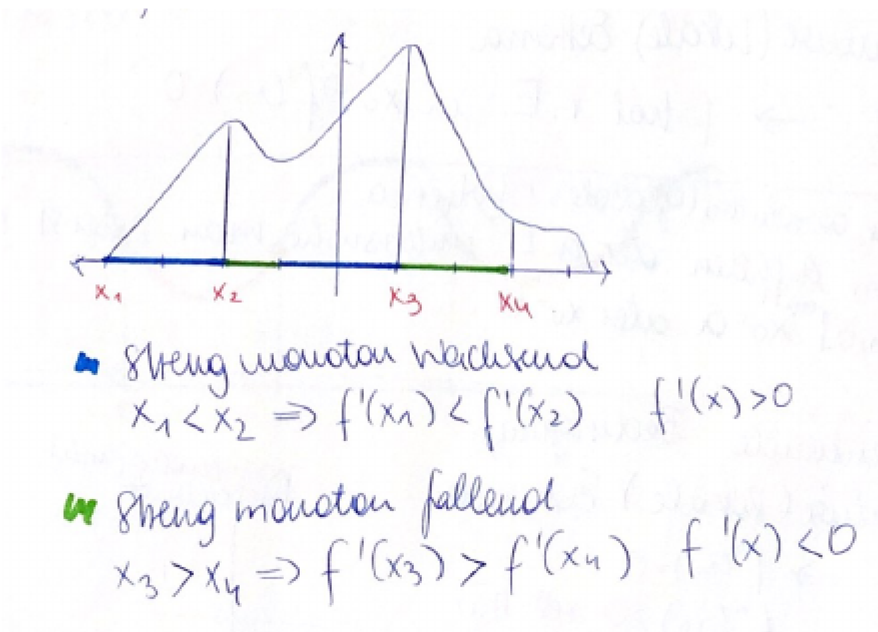
Monotonie:

Definition

monoton steigend: es gilt $a_{n+1} \geq a_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$ **streng monoton steigend**: es gilt $a_{n+1} > a_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$ **monoton fallend**: es gilt $a_{n+1} \leq a_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$ **streng monoton fallend**: es gilt $a_{n+1} < a_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiel



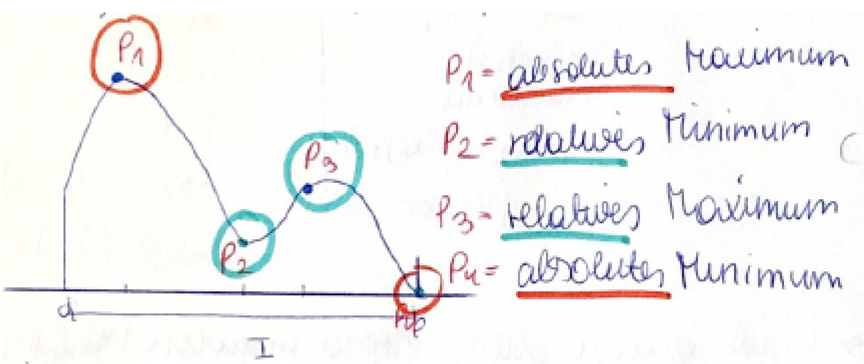


Extremwerte:

Definition

relatives (=lokales) Maximum: $f(x)≤f(x_0)$ in einer Umgebung $U_j(x_0)$ von x_0 **relatives (=lokales) Minimum**: $f(x)≥f(x_0)$ in einer Umgebung $U_j(x_0)$ von x_0 **absolutes (=globales) Maximum**: $f(x)≤f(x_0)$ für alle x in I **absolutes (=globales) Minimum**: $f(x)≥f(x_0)$ für alle x in I

Beispiel



notwendige Bedingung

$f'(x)=0$

hinreichende Bedingung

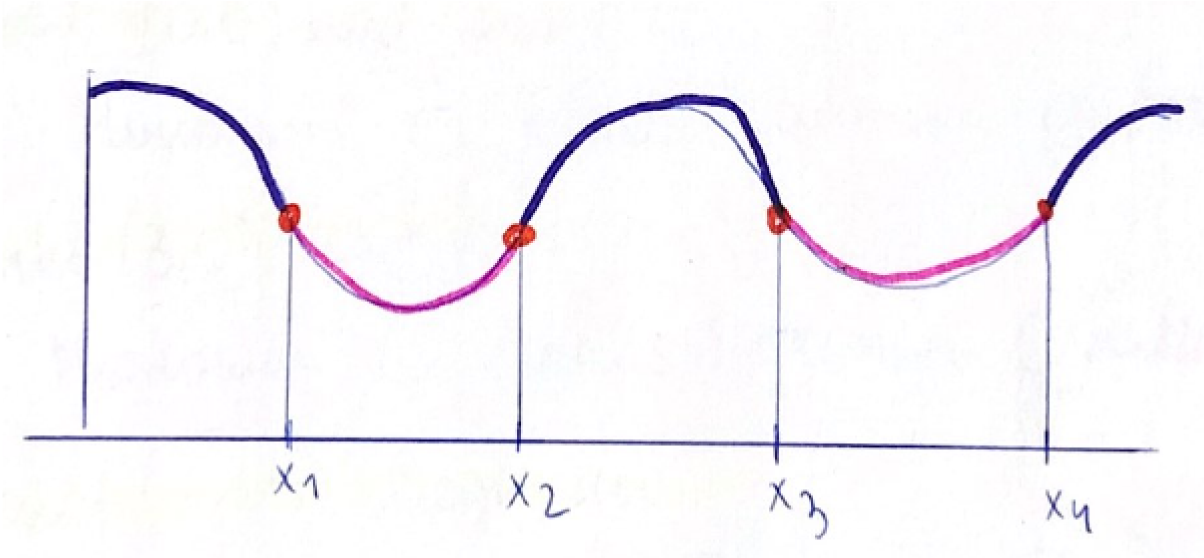
$f''(x)<0$, dann relatives Maximum $f''(x)>0$, dann relatives Minimum

Konvexität:

Konvex: Linkskrümmung, die Kurve ist unter der Sekante. f' ist monoton $f''(x)<0$ **Konkav**: Rechtskrümmung, die Kurve ist über der Sekante. f' ist monoton $f''(x)>0$

Wendepunkt

$f'(x)$ hat Extremum $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0)$ $\neq$ 0 $f'''(x_0)$ < 0, dann von links nach rechts $f'''(x_0)$ > 0, dann von rechts nach links



blau=konkav, rosa=konvex

Aufgabe 5

- $f(x,y)$ = e^x $*$ (x^3 - $5x^2$ + $7x$ + y^2 - 7), zusätzlich f_{yy} und die Determinante D gegeben:
  - Für das Aufsuchen von lokalen Extrema von f ist die Bedingung $grad f = 0$
    - [x] notwendig
    - [ ] hinreichend
    - [ ] notwendig und hinreichend
  1. Im stationären Punkt von f gilt:
     - [ ] $f=0$
     - [ ] $f_x=f_y=0$
     - [ ] $f_{xx}=f_{yy}=f_{xy}=0$
  2. $P1(0,0)$ ist:
     - [ ] lokales Minimum
     - [ ] lokales Maximum
     - [x] Sattelpunkt

3. $P2(3,0)$ ist:
    - [x] lokales Minimum
    - [ ] lokales Maximum
    - [ ] Sattelpunkt
4. $P3(-1,0)$ ist:
    - [ ] lokales Minimum
    - [ ] lokales Maximum
    - [x] Sattelpunkt
5. In einem lokalen Minimum von f ist die Hesse-Matrix:
    - [x] positiv definit
    - [ ] negativ definit
    - [ ] indefinit
6. Ein lokales Extremum ist immer auch ein globales Extremum:
    - [ ] Ja
    - [x] Nein
7. Ein globales Extremum liegt stets am Rand des vorgegebenen Definitionsbereichs von f:
    - [ ] Ja
    - [x] Nein

31.01.2020

Aufgabe 4

- Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Formulierung, Zeichnung
- Mittelwertsatz der Integralrechnung: Formulierung, Zeichnung
- Ferner berechne man den Mittelwert einer Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $[a,b]$ gemäß dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für ein selbst gewähltes konkretes Beispiel.

Aufgabe 5

- Die Potenzreihe $\sum_{n=0} (-1)^n \frac{x^n}{n^3+1}$ mit Konvergenzradius $R=1$ gegeben:
    1. Die Reihe konvergiert für:
        - [x] $x = -1$
        - [x] $x = 0$
        - [x] $x = 0.375$
    2. Die Reihe divergiert für:
        - [x] $x = -1.25$
        - [ ] $x = -1$
        - [ ] $x = 1$
    3. Die Potenzreihe besitzt den Entwicklungspunkt:
        - [ ] $x_0 = -1$
        - [x] $x_0 = 0$
        - [ ] $x_0 = 1$
    4. Zutreffendes bitte ankreuzen:
        - [ ] Zur Überprüfung der Konvergenz der Reihe eignet sich das Konvergenzkriterium von Cauchy.
        - [x] Zur Überprüfung der Konvergenz der Reihe eignet sich das Wurzelkriterium.

    - [ ] Zur Überprüfung der Konvergenz der Reihe eignet sich die Regel von de l'Hospital.
    - [x] Ist die Reihe an der Stelle $x = x_1$ konvergent, dann auch für $x=\frac{x_1}{2}$.
5. Jede absolut konvergente unendliche Reihe ist auch:
    - [ ] bedingt konvergent
    - [x] konvergent

29.11.2019

Aufgabe 4

- Theorie uneigentliches Integral 1. und 2. Art definieren + Skizze + Beispiele

Aufgabe 5

- Gegeben sei eine (differenzierbare) Funktion $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$ durch $z=f(x,y)$.
    1. Der Graph der Funktion f ist:
        - [ ] ein Intervall in $\mathbb{R}$
        - [ ] eine Kurve im $\mathbb{R}^2$
        - [x] eine Fläche im $\mathbb{R}^3$
    2. Wieviele partielle Ableitungen zweiter Ordnung besitzt die Funktion f im Allgemeinen?
        - [ ] 1
        - [ ] 2
        - [x] 4
        - [ ] 8
        - [ ] ∞
    3. Die totale Differenzierbarkeit von f ist für die Existenz ihrer partiellen Ableitungen:
        - [ ] notwendig
        - [x] hinreichend
    4. Die Richtungsableitung von f:
        - [ ] beschreibt, in welcher Richtung sich f am stärksten ändert
        - [ ] gibt den größten Funktionswert von f an
        - [ ] ist ein Sonderfall der partiellen Ableitung
    5. Der Gradient $grad f$ gibt die Richtung des größten Anstiegs von f an:
        - [x] Ja
        - [ ] Nein
    6. Der Betrag $|grad f|$ gibt den Wert des größten Anstiegs von f an:
        - [x] Ja
        - [ ] Nein
    7. Der Gradient $grad f$ ist in jedem Punkt von D in Bezug auf die Tangentialebene ein:
        - [x] Richtungsvektor
        - [ ] Normalvektor
    8. Der Gradient $grad f$ verschwindet im Allgemeinen ___ an jenen Stellen, an denen die Funktion f ein relatives Extremum besitzt.
        - [ ] genau
        - [x] zumindest
        - [ ] höchstens

28.06.2019

Aufgabe 4

- Wann (in)homogen, Variation der Konstanten, Trennung der Variablen, allgemeine Lösung? - immer jeweils mit Beispiel

Aufgabe 5

- Zu dem Integral $\int \frac{2x}{1-x^2} dx$ fragen beantworten:
    1. Das Integral ist der Limes von Riemann'schen Zwischensummen:
        - [ ] Ja
        - [x] Nein
    2. Das Integral kann durch Partialbruchzerlegung bestimmt werden:
        - [x] Ja
        - [ ] Nein
    3. Das Integral kann durch partielle Integration bestimmt werden:
        - [ ] Ja
        - [x] Nein
    4. Das Integral kann durch eine Substitution gelöst werden:
        - [x] Ja
        - [ ] Nein
    5. Das Integral ist eindeutig bis auf eine additive Konstante bestimmt:
        - [x] Ja
        - [ ] Nein
    6. Das Integral ist durch folgende Stammfunktion gegeben:
        - [ ] $ln(1-x^2)$
        - [ ] $2ln(1-x^2)$
        - [x] $-ln(1-x^2)$
    7. Zur Berechnung dieses Integrals können verwendet werden:
        - [ ] Mittelwertsatz der Integralrechnung
        - [ ] Integralkriterium für unendliche Reihen
        - [ ] Regel von de l'Hospital

26.04.2019

Aufgabe 4

- Differentialrechnung von Funktionen in mehreren Variablen: Man erkläre (möglichst knapp) nachstehende Begriffe und gebe zu jedem Begriff ein konkretes Beispiel an:
    - Definition und geometrische Interpretation der partiellen Ableitung
    - Richtungsableitung
    - Kettenregel
    - Ableitung einer implizierten Funktion

Aufgabe 5

- Theorie über Folgen und Reihen zum Ankreuzen:

1. Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge (an), falls: *richtige Definition ankreuzen*
2. Die Folge $a_n = \frac{1}{(n+4)^2}$ ist:
   - [x] monoton
   - [x] beschränkt
   - [x] konvergent
3. Die Folge $a_n = 4(-1)^{n+1}$ ist:
   - [ ] monoton
   - [x] beschränkt
   - [ ] konvergent
4. Jede konvergente Folge ist beschränkt:
   - [x] Ja
   - [ ] Nein
5. Jede (nach oben und nach unten) beschränkte Folge ist konvergent:
   - [ ] Ja
   - [x] Nein
6. Die Folge a_n = $(\frac{1+1}{n})^n$ konvergiert gegen:
   - [x] 0
   - [ ] 1
   - [ ] 2
   - [ ] e
   - [ ] ∞
7. Ist die Folge (a_n) konvergent, dann konvergiert auch die Reihe $\sum a_n$:
   - [ ] Ja
   - [x] Nein
8. Ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent, dann konvergiert auch die Folge (a_n):
   - [x] Ja
   - [ ] Nein

Allgemeines

Hauptsatz über implizite Funktionen

- $f(x_0, y_0) = 0$
- f_x und f_y seien stetig in einer Umgebung von (x_0, y_0)
- $f_y|x_0, y_0 \neq 0$

Differentialgleichung

Man löse die inhomogene Differentialgleichung $\underbrace{xy'+y}_{\text{homogene Differentialgleichung}} = 6x^2+6x+2$

1. Zuerst die homogene Differentialgleichung lösen.

$$xy'+y=0$$

2. Diese Gleichung muss man nach y umformen. ($y'=\frac{dy}{dx}$) $e^{\ln x}=x$, $\ln e^x=x$

$$y_h=\frac{1}{x}\cdot c \qquad e^c=C$$

3. Um die part. Lösung zu erhalten, muss man y anders hinschreiben

$$y_p=C(x)\cdot\frac{1}{x}\ \ldots$$ C ist nun zu einer Funktion geworden.

Danach leitet man y_p ab:

$$y'=C'(x)\frac{1}{x}-C(x)\frac{1}{x^2}$$

4. Nun muss man y' und y_p in die ursprüngliche Funktion einsetzen ($xy'+y=6x^2+6x+2$)

$$x\left(C'(x)\frac{1}{x}-C(x)\frac{1}{x^2}\right)+C(x)\frac{1}{x}=6x^2+6x+2$$

$$C'(x)=6x^2+6x+2$$ → Integrieren, damit man $C(x)$ bekommt

$$C(x)=2x^3+3x^2+2x$$

5. Das $C(x)$ in die part. Lösung einsetzen

$$y_p=(2x^3+3x^2+2x)\frac{1}{x}=2x^2+3x+2$$

6. Allgemeine Lösung:

$$y=y_h+y_p$$

$$y=\frac{C}{x}+2x^2+3x+2$$

Horner Schema

Horner-Schema als Alternative zur Polynomdivision um 0-Stellen zu lösen.

$$f(x) = 5x^3 - 8x^2 - 27x + 18$$

Horner-Schema:

- Nullstellen bestimmen

1. 1 Nullstelle muss man raten $(x=-2)$
2. Die Zahlen, die vor den x stehen muss man nach unten schreiben

$$f(-2) = 0$$

$x=-2$	5	-8	-27	18
		-10	36	-18
	5	-18	9	0

Null muss am Ende rauskommen

$5x^2 - 18x + 9 = 0$ ... pq-Formel

Richtungsableitung

Ableitung in eine Richtung best.

1, Zuerst den Gradient der Funktion bestimmen

1.1, $\text{grad } f = \begin{pmatrix} f_x \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$

2, Den angegebenen Punkt ~~einsetzen~~ in den Gradient einsetzen

3. Ableitung in eine Richtung best.

3.1, In Richtung der Koordinatenachsen

3.1.1, x-Richtung : $\text{grad}f \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{x}}$

3.2.2, y-Richtung : $\text{grad}f \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{y}}$

3.2, In Richtung eines Punktes P

3.2.1, Vektor auf Länge 1 normieren $\left(\|V\| = \frac{1}{v}\right)$

3.2.2, gradf mit dem Vektor multiplizieren $\left(\text{grad } f \cdot \frac{1}{v} \cdot V\right) = \underline{\underline{erg}}$

3.3, In Richtung des Gradienten

3.3.1, Gradienten-vektor auf Länge 1 normieren $\left(\|\text{grad } f\| = \frac{1}{v} \cdot V\right)$

3.3.2, grad F mit dem Vektor multiplizieren $\left(\text{grad } F \cdot \frac{1}{v} \cdot V\right) - \underline{\underline{erg}}$

Kurvendiskussion

- Nullstellen
  - $f(x) = 0$
- Extremwerte
  - $f'(x) = 0$
    - $f''(x) < 0$ ... Maximum
    - $f''(x) > 0$ ... Minimum
    - $f''(x) = 0$ ... Sattelpunkt
- Wendepunkte
  - $f''(x) = 0$
  - $f'''(x) \neq 0$
- Konvexität
  - $f''(x) > 0$ ... konvex
  - $f''(x) < 0$ ... konkav

Tangentialebene

$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

Regel der Ableitung der Umkehrfunktion

$f'^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Taylorreihe

$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x, x_0) + f_y(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y, y - y_0)^2$

Relative Extrema

Relative Extrema einer Funktion bestimmen:

1, Alle 1 und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion angeben

2, Hesse-Matrix Aufschreiben

$$\begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline x & f_{xx} & f_{xy} \\ y & f_{yx} & f_{yy} \end{array}$$

3, Determinante der Hesse-Matrix bestimmen

4, Aus f_x oder f_y x und y-Werte herauslesen

5, Dann jeweils über f_x oder f_y die Werte bestimmen

5.1, In f_x oder f_y zuerst x aus 4, einsetzen, dann die y-Werte best.

5.2, In f_y oder f_x zuerst y aus 4, einsetzen, dann die x-Werte best.

6, Dann ergibt sich die Anzahl der Punkte.

6.1, z.B.: $P_1(x, y_1)$, $P_2(x, y_2)$, $P_3(x_1, y)$, $P_4(x_2, y)$, ... Beispielhaft, wenn aus x zwei y-Werte folgen und aus y auch zwei x-Werte.

7, Bestimmen ob Minimum, Maximum, Sattelpunkt

Hinreichend: $\nabla^2 f(x_E, y_E) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$

	positiv definit (lok.) Min	negativ definit (lok.) Max	indefinit Sattelpunkt
1,	Alle EW positiv	Alle EW negativ	Es gibt positive und negative EW
2,	Hauptminoren + + + + ...	Hauptminoren − + − + ...	sonst !

Funktionskonvergenz

Man untersuche, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Funktionsreihe konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} (x+1)^n$$

Allg. Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$a_n = \frac{n}{n^2+1}$

$x_0 = -1$

$|x+1| < 1$

1, $x < 0$

2, $-x-1<1 \quad | +2$

$-x < 2$

$x > -2$

$-2 < x < 0$

Die Funktionsreihe konvergiert für alle x, für die gilt

$$|x - x_0| < R$$

R berechnen

$$\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n^2+1)}{((n+1)^2+1)\cdot n}} =$$

$$\frac{1}{\frac{n^3+n+n^2+1}{(n^2+2n+1)\cdot n}} = \frac{1}{\lim \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+n}} = \frac{1}{\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{1}{1} = 1$$

$R = 1$

dere erich

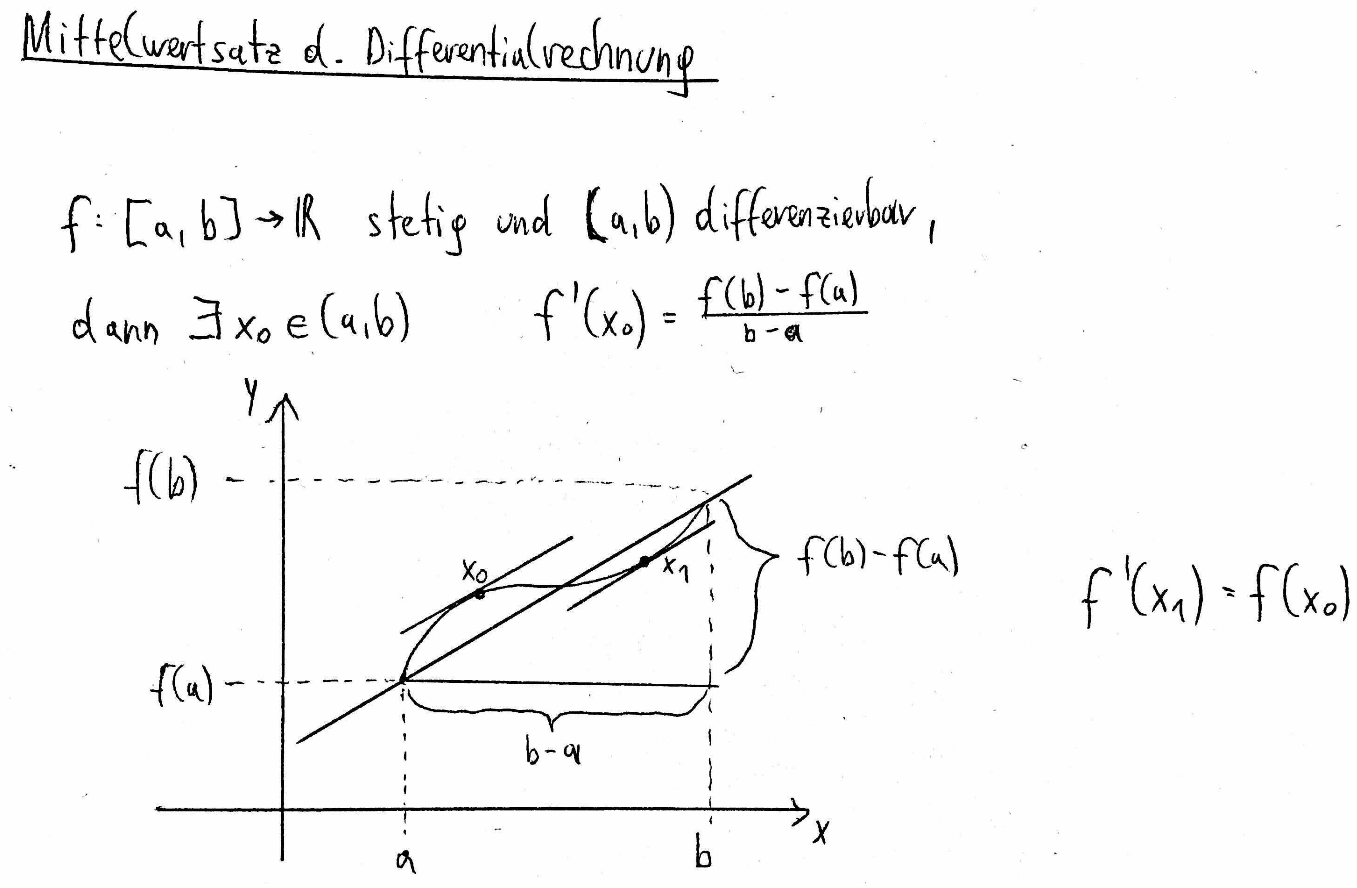
Implizit ableiten

$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, dass wenn eine Funktion in einem kompakten Intervall $[a,b] => {\rm I!R}$ stetig ist und auf einem offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist, dann existiert mindestens ein x_0 aus dem offenen Intervall (a,b), dessen Ableitung gleich der Sekantensteigung der

Punkte a und b ist.



Mittelwertsatz der Integralrechnung

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung besagt, dass wenn eine Funktion in einem kompakten Intervall $[a,b] => {\rm I!R}$ stetig ist, dann existiert ein x_0 aus dem Intervall $[a,b]$, dessen Funktionswert ein geeigneter Mittelwert der Funktionswerte der Funktion f aus dem Intervall $[a,b]$ ist.