Beispiel 5 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 5, 27.04.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 04/2006

1 Angabe

Man prüfe nach, ob die Funktionen

$$\text{(a) } f(x,y,z) = x + (yz)^{1/2} \text{ (fuer } \ y,z \geq 0)$$
$$\text{(b) } f(x,y) = x^2 + y$$
$$\text{(c) } f(x,y) = ax^b y^c \text{ (mit } \ a,b,c \in \mathbb{R},\ x,y > 0)$$

homogen sind.

2 Theoretische Grundlagen - homogene Funktionen

Eine Funktion auf dem k-dimensionalen reellen Vektorraum

$$\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

heißt homogen vom Grade n genau dann, wenn für alle $\alpha, x_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k) = \alpha^n \cdot \Phi(x_1, \ldots, x_k)$$

3 Lösung des Beispiels

3.1 Beispiel (a)

$$f(x,y,z) = x + (yz)^{1/2} \text{ (fuer } \ y,z \geq 0)$$
$$\alpha \in \mathbb{R}$$
$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha^r \cdot f(x,y,z)$$
$$\alpha x + (\alpha y \cdot \alpha z)^{1/2} = \alpha^r (x + (yz)^{1/2})$$
$$\alpha x + (\alpha^2 \cdot y \cdot z)^{1/2} = \alpha^r (x + (yz)^{1/2})$$
$$\alpha x + \alpha (y \cdot z)^{1/2} = \alpha^r (x + (yz)^{1/2})$$
$$\alpha \cdot (x + (yz)^{1/2}) = \alpha^r (x + (yz)^{1/2})$$

Da auf beiden Seiten dasselbe Steht folgt $r = 1$ und die gegebene Funktion ist homogen.

3.2 Beispiel (b)

$$f(x, y) = x^2 + y$$
$$\alpha \in \mathbb{R}$$
$$f(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = \alpha^r \cdot f(x, y)$$
$$(\alpha \cdot x)^2 + \alpha \cdot y = \alpha^r \cdot (x^2 + y)$$
$$\alpha^2 \cdot x^2 + \alpha \cdot y = \alpha^r \cdot (x^2 + y)$$
$$\alpha \cdot (\alpha x^2 + y) \neq \alpha^r \cdot (x^2 + y)$$

r kann keinen Wert annehmen, so dass diese Gleichung erfüllt wäre. Die gegebene Funktion ist also inhomogen.

3.3 Beispiel (c)

$$f(x, y) = a x^b y^c \text{ (mit } \; a, b, c \in \mathbb{R}, \; x, y > 0)$$
$$\alpha \in \mathbb{R}$$
$$f(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = \alpha^r \cdot f(x, y)$$
$$a \cdot (\alpha \cdot x)^b \cdot (\alpha \cdot y)^c = \alpha^r \cdot (a \cdot x^b \cdot y^c)$$
$$a \cdot \alpha^b \cdot x^b \cdot \alpha^c \cdot y^c = \alpha^r \cdot (a \cdot x^b \cdot y^c)$$
$$\alpha^{b+c} \cdot (a \cdot x^b \cdot y^c) = \alpha^r \cdot (a \cdot x^b \cdot y^c)$$

Da $r = b + c$ gilt, ist die gegeben Funktion homogen.