Runde 4, Beispiel 25

LVA 118.181, Übungsrunde 4, 10.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.11.2006

1 Angabe

Man betrachte die homogene Eulersche Dgl.

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0$$

Mittels Ansatz $y(x) = x^r$ und Lösen der Indexgleichung (wie beim modifizierten Potenzreihenansatz) ermittle man eine Lösung $\varphi_1(x)$ der gegebenen Dgl. Eine zweite, unabhängige Lösung $\varphi_2(x)$ bestimme man mittels Reduktionsansatz $y(x) = C(x)\varphi_1(x)$. Man überprüfe die Unabhängigkeit beider Lösungen durch Berechnung der Wronski-Determinante.

2 Lösung des Beispiels

2.1 Lösen der Indexgleichung

Vorbereitung des Ansatzes:

$$y(x) = x^r, \qquad y'(x) = rx^{r-1}, \qquad y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$$

Einsetzen Ansatzes in Indexgleichung, Lösen der Indexgleichung:

$$\begin{gathered}
x^2 r(r-1)x^{r-2} + 3xrx^{r-1} + x^r = 0 \\
r(r-1)x^r + 3rx^r + x^r = 0 \\
r(r-1) + 3r + 1 = 0 \\
r^2 + 2r + 1 = 0 \\
(r+1)(r+1) = 0 \\
\Rightarrow \boldsymbol{\mu_{1,2} = -1} \\
\Rightarrow \mathbf{xc''(x) + c'(x) = 0}
\end{gathered}$$

(Multiplikation mit x notwendig, da Doppellösung/Resonanzfall)

2.1.1 Lösen der Differentialgleichung $xc''(x) + c'(x) = 0$

Setzen $c'' = u'$, $c' = 0$ (Substitution)

$$
\begin{aligned}
xu' + u &= 0 \\
xu' &= -u \\
\frac{u'}{u} &= -\frac{1}{x} \\
\ln|u| &= -\ln|x| \\
u = c'(x) &= \frac{1}{x} \\
c(x) &= \ln|x| \\
\mathbf{y_p(x)} = \mathbf{c(x)\frac{1}{x}} &= \mathbf{\frac{\ln|x|}{x}}, \qquad x > 0
\end{aligned}
$$

2.1.2 Überprüfung der Unabhängigkeit, Fertigstellung

Die n Lösungen der DGL $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ bilden genau dann eine Basis des Lösungsraums (= Lösungsbasis, Fundamentalsystem), wenn die **Wronski-Determinante** $W(x) \neq 0$ für <u>ein</u> $x \in I$ ist:

$$W(x) = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix}$$

Die **Lösungsbasis** ist $\{\mathbf{\frac{1}{x}}, \mathbf{\frac{\ln x}{x}}\}$ und die Unabhängigkeit wird verifiziert durch:

$$\frac{1 - \ln|x|}{x^3} + \frac{\ln|x|}{x^3} = \frac{1}{x^3} \neq 0$$