3. UE-Test in Algebra und Diskrete Mathematik für Informatik und Wirtschaftsinformatik UE 2021W - Gruppe G

35 Minuten Arbeitszeit, keine Hilfsmittel erlaubt

1. (8 Punkte) Seien $G := \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ und $a \circ b := a + b + 2ab$. Untersuchen Sie, ob $(G, \circ)$ eine Halbgruppe, ein Monoid, bzw. eine Gruppe ist. Überprüfen Sie insbesondere, ob die Operation $\circ$ wohldefiniert ist.

2. Wir betrachten die symmetrische Gruppe $(S_4, \circ)$ und zwei ihrer Elemente:

$$\sigma = (1234), \quad \tau = (123).$$

   (a) (4 Punkte) Bestimmen Sie $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$ und geben Sie damit die von σ erzeugte Untergruppe U an.

   (b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Linksnebenklasse $\tau \circ U$ und die Rechtsnebenklasse $U \circ \tau$. Ist U ein Normalteiler von S_4?

3. (5 Punkte) Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. UE-Test in Algebra und Diskrete Mathematik für Informatik und Wirtschaftsinformatik UE 2021W - Gruppe H

35 Minuten Arbeitszeit, keine Hilfsmittel erlaubt

1. (8 Punkte) Seien $H := \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ und $a \diamond b := a + b - 2ab$. Untersuchen Sie, ob $(H, \diamond)$ eine Halbgruppe, ein Monoid, bzw. eine Gruppe ist. Überprüfen Sie insbesondere, ob die Operation $\diamond$ wohldefiniert ist.

2. Wir betrachten die symmetrische Gruppe $(S_4, \circ)$ und zwei ihrer Elemente:

$$\sigma = (1423), \quad \tau = (132).$$

   (a) (4 Punkte) Bestimmen Sie $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$ und geben Sie damit die von σ erzeugte Untergruppe U an.

   (b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Linksnebenklasse $\tau \circ U$ und die Rechtsnebenklasse $U \circ \tau$. Ist U ein Normalteiler von S_4?

3. (5 Punkte) Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Übungstest aus Algebra und Diskrete Mathematik für I.u.WI
Gruppe I - Müllner
26.01.2022

Name:

Matrikelnummer:

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen. Arbeitszeit: 35 Minuten

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	7	
2	6	
3	7	
Gesamt	20	

Aufgabe 1: (7 Punkte)

(a) (4 Punkte) Untersuchen Sie, ob die Menge M mit der Operation $\circ$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid bzw eine Gruppe ist:

$$M = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \qquad a \circ b = \min(a, b).$$

(b) (3 Punkte) Geben Sie eine Menge an, die mit der gewöhnlichen Multiplikation eine Gruppe bildet. Begründen Sie!

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Permutationen der S_6

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \rho = (12)(45).$$

Bestimmen sie nachfolgenden Permutationen in Zyklendarstellung und ihr Vorzeichen

(a) (3 Punkte) $\rho\sigma\rho^{-1}$

(b) (3 Punkte) $\rho\sigma^{-2}$.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Untersuchen Sie, ob W_1 bzw W_2 Untervektorraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ ist und geben Sie gegebenenfalls eine Basis an.

- $W_1 = \{(x, y, z) | x = y\}$,
- $W_2 = \{(x, y, z) | x \geq 0\}$.

3. Übungstest aus Algebra und Diskrete Mathematik für I.u.WI
Gruppe J – Holzer
26.01.2022

Name:

Matrikelnummer:

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen. Arbeitszeit: 35 Minuten

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	7	
2	6	
3	7	
Gesamt	20	

Aufgabe 1: (7 Punkte)

(a) (4 Punkte) Untersuchen Sie, ob die Menge M mit der Operation $\circ$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid bzw. eine Gruppe ist:

$$M = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \qquad a \circ b = \min(a, b).$$

(b) (3 Punkte) Geben Sie eine Menge an, die mit der gewöhnlichen Multiplikation eine Gruppe bildet. Begründen Sie!

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Permutationen der S_6:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \rho = (12)(45).$$

Bestimmen sie nachfolgenden Permutationen in Zyklendarstellung und ihr Vorzeichen

(a) (3 Punkte) $\rho\sigma\rho^{-1}$,

(b) (3 Punkte) $\rho\sigma^{-2}$.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Untersuchen Sie, ob W_1 bzw. W_2 Untervektorraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ ist und geben Sie gegebenenfalls eine Basis an.

- $W_1 = \{(x, y, z) \mid x = y\}$,
- $W_2 = \{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$.

3. Übungstest aus Algebra und Diskrete Mathematik für I.u.WI
Gruppe K – Holzer
26.01.2022

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	7	
2	6	
3	7	
Gesamt	20	

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 35 Minuten

Aufgabe 1: (7 Punkte)
Es sei U die von $\overline{3}$ erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Z}_{12}, +)$. Handelt es sich bei U um einen Normalteiler? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{12}/U$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)
Überprüfen Sie das Polynom $2x^2 - 4$ auf Irreduzibilität über

(a) (3 Punkte) $\mathbb{Q}$,

(b) (3 Punkte) $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Es sei W der kleinste Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$, der die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ enthält. Überprüfen Sie für die folgenden beiden Vektoren, ob sie in W liegen:

$$v_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}.$$