

Übungstest 2 aus Analysis f. Informatik
und Wirtschaftsinformatik

Gruppe 2 - Eigentümer

18. Mai 2015

Name:

Matrikelnummer:

Punkte

Beispiel 1: 17

Beispiel 2: 16

Beispiel 3: 17

Summe: 120

Arbeitszeit: 50 Minuten

1.) Man berechne die ersten 4 Ableitungen der Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$, und gebe einen Ausdruck für die n -te Ableitung an. (7 Punkte)

Lösung:

$$\underline{f'(x) = \frac{(x-1) \cdot 1 - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = (-2)(x-1)^{-2}}$$

$$\underline{f''(x) = (-2)(-2)(x-1)^{-3} = \frac{2 \cdot 2}{(x-1)^3}}$$

$$\underline{f'''(x) = (-2)(-2)(-3)(x-1)^{-4} = \frac{-2 \cdot 2 \cdot 3}{(x-1)^4}}$$

$$\underline{f^{IV}(x) = (-2)(-2)(-3)(-4)(x-1)^{-5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(x-1)^5}}$$

$$\underline{f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (x-1)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}, n \geq 1}$$

Beweis durch Induktion:

$$\underline{n=1: f'(x) = (-1)^1 \cdot 2 \cdot 1! \cdot (x-1)^{-2}}$$

$$\begin{aligned} \underline{n \rightarrow n+1: f^{(n+1)}(x)} &= (-1)^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (-1)(n+1) \cdot (x-1)^{-n-2} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (n+1)! \cdot (x-1)^{-(n+1+1)} \end{aligned}$$

□



2.) Man berechne den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \ln(1-x) \cdot \ln x. \quad (6 \text{ Punkte})$$

Lösung: $\lim_{x \rightarrow 1-} \ln(1-x) \cdot \ln x =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\ln(1-x)}{(\ln x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} = (\text{Regel von l'Hospital})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(-1) \cdot \frac{1}{1-x}}{(-1) \cdot (\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x \cdot (\ln x)^2}{1-x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(\ln x)^2}{1-x} = 1 \cdot 0 = \underline{0}, \text{ denn:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(\ln x)^2}{1-x} = \frac{0}{0} = (\text{Regel von l'Hospital})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(-1)} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 1}{(-1)} = 0.$$



3.) Man diskutiere die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (d.h. man bestimme Nullstellen, Grenzwerte, Symmetrieeigenschaften, Extremwerte, Wendepunkte).

(7 Punkte)

Lösung:

$f(x) > 0$ und $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, d.h. f ist eine „gerade Funktion“ (symmetrisch zur y-Achse).

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, also ist die x-Achse Asymptote.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x) \cdot e^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = (-2) \cdot e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} \\ &= (4x^2 - 2)e^{-x^2} \Rightarrow f'''(x) = 8x \cdot e^{-x^2} + (4x^2 - 2)(-2x)e^{-x^2} \\ &= (12x - 8x^3)e^{-x^2} = 4x \cdot (3 - 2x^2)e^{-x^2} \end{aligned}$$

Extremwert: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Wegen $f''(0) = -2 < 0$ und $f(0) = 1$ ist der Punkt $(0, 1)$ das absolute Maximum der Funktion.

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Wegen $x^2 = \frac{1}{2}$ haben wir $f'''(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}) = \pm 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (3 - 1) \cdot e^{-1/2} = \pm 4\sqrt{2} \cdot e^{-1/2} \neq 0$, also liegen Wendepunkte vor:

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2})$ und $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2})$.

Skizze der Funktion:

