Satz: Ableitungsregeln, Vor.: f, g differenzierbar

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

- Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beweis:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$$

- Kettenregel

(Bsp. $\sin(\cos(x))$)

zusammengesetzte Fkt.

$$F(x) = f(g(x))$$

$$\Rightarrow F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Beweis: GW (Def.):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

- Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\parallel$$

$$\left(f(x)\cdot (g(x))^{-1}\right)'$$

$\downarrow$ Ableiten

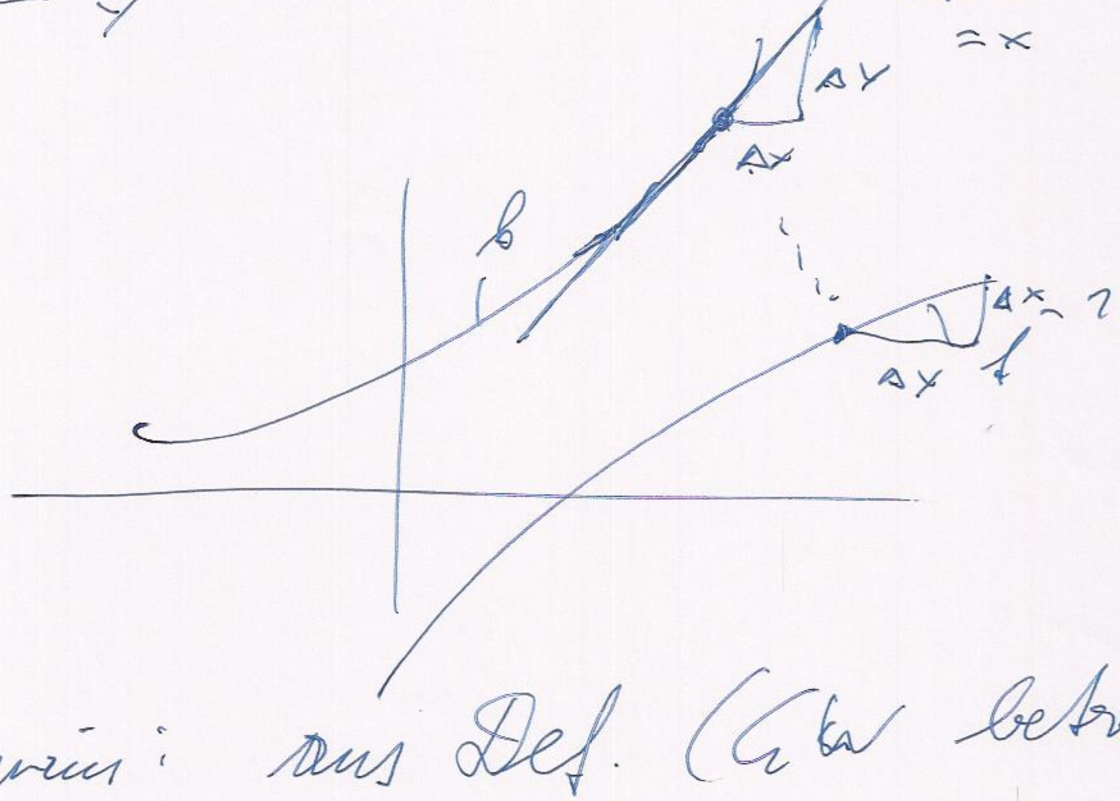
• Ableitung der Umkehrfkt.

falls $f : D \to f(D)$ invertierbar und f' keine Nullstellen hat

$$\Downarrow$$

$$\forall \underline{y} \in f(D): \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(y)}_{=x})}$$

$x \mapsto y$



Beweis: aus Def. (Graph betrachten)

- $(\sin x \cdot \cos x)' = \cos x \cdot \cos x$
$+ \sin x \cdot (-\sin x) =$
$= \cos^2 x - \sin^2 x$

- $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$

Ableitung von $\ln x$ = ?

$y = f(x) = \exp(x) = e^x = y$
$\Rightarrow x = \ln y$

$f'(x) = e^x$

$$(\ln y)' = \frac{1}{\exp(x)} =$$

$$= \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$x^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \ln x}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{(x^{\alpha})'}} = \left(e^{\alpha \cdot \ln x}\right)' =$$

$$= \exp\left(\alpha \cdot \ln x\right) =$$

$$= \exp'(\alpha \cdot \ln x) \cdot (\alpha \cdot \ln x)' =$$

$$= \exp(\alpha \cdot \ln x) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \underline{\underline{\alpha \cdot x^{\alpha - 1}}}$$

$, \alpha \in \mathbb{R}$

Def.:

- n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ an Stelle x_0

rekursiv definiert:

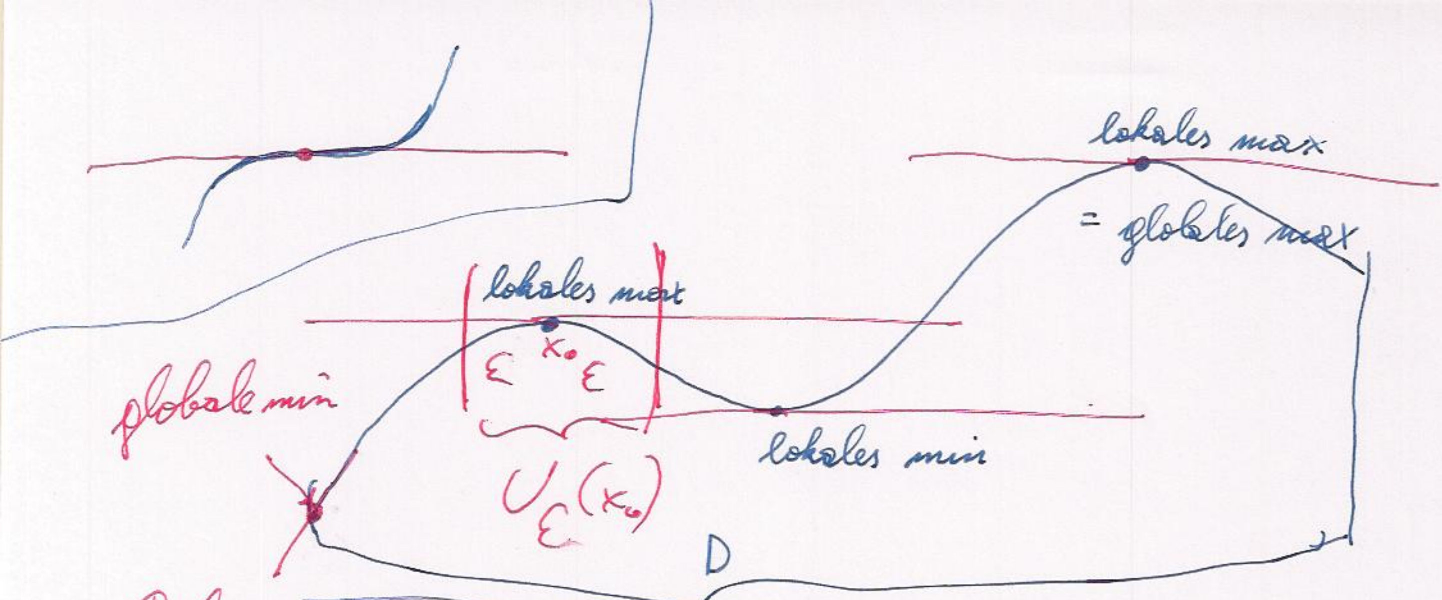
$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) \quad , \quad n \geq 1$$

$$f^{(1)}(x) = f'(x)$$

$f^{(2)}(x) := \left(f'(x)\right)' = f''(x)$

- $f(x)$ heißt an Stelle x_0 n-mal differenzierbar, falls n-te Ableitung an Stelle x_0 existiert

- $f(x)$ n-mal stetig differenzierbar in Stelle x_0:
  n-te Ableitung $f^{(n)}$ ist auch stetig in x_0



Def. Fkt.: $f : D \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D$ relatives (= lokales) Maximum :⇔

$\exists$ Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$: $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$

$x_0 \in D$ globales Maximum :⇔

$f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in D$

analog: relatives (= lokales) Minimum
globales Minimum

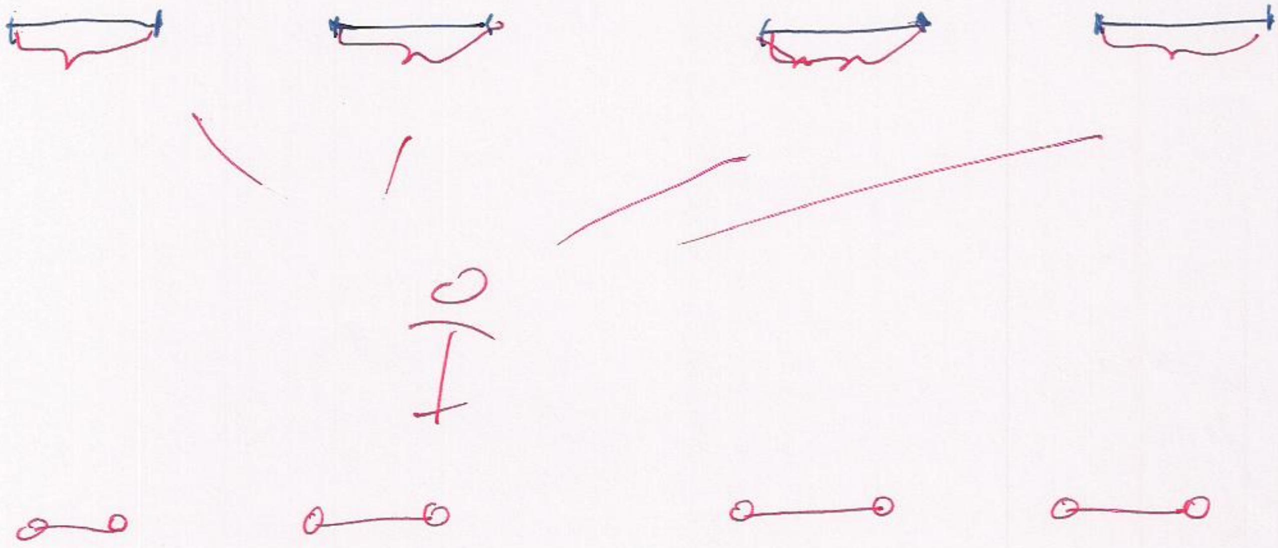
Minima und Maxima heißen Extremwerte

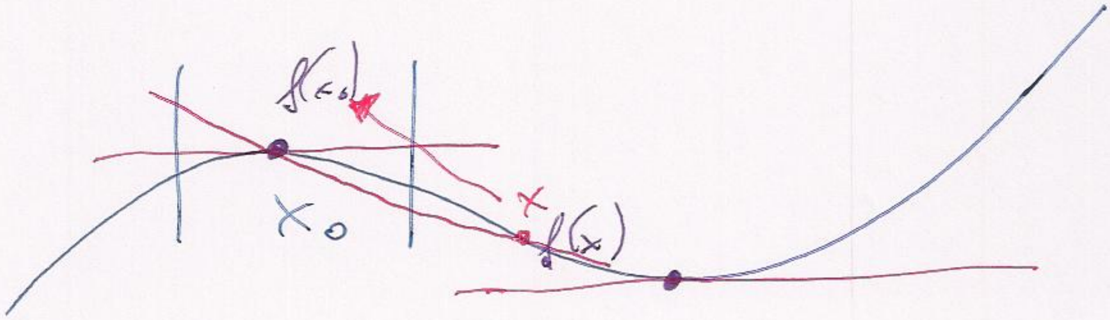
Def.: $I = [a,b]$ abgeschlossenes Intervall

$\Rightarrow \mathring{I} = (a,b)$: das Innere von I

$x \in \mathring{I} \Rightarrow x$ ist innerer Punkt von I

analog für Vereinigung von Intervallen





Satz: $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Fkt.

x_0 relatives Extremum im Inneren von D

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0.$$

Beweis: o.B.d.A: betr.: x_0 rel. Maximum

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{in } U_\varepsilon(x_0)$$

f diffbar in $x_0 \Rightarrow$

$$\text{exist.: } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\| \qquad \leq 0$$

x von rechts:
rechtsseitigen GW

$$\lim_{x \to x_0^+} \underbrace{\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}}}_{\leq 0}$$

x von links: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \geq 0$

linksseitige GW

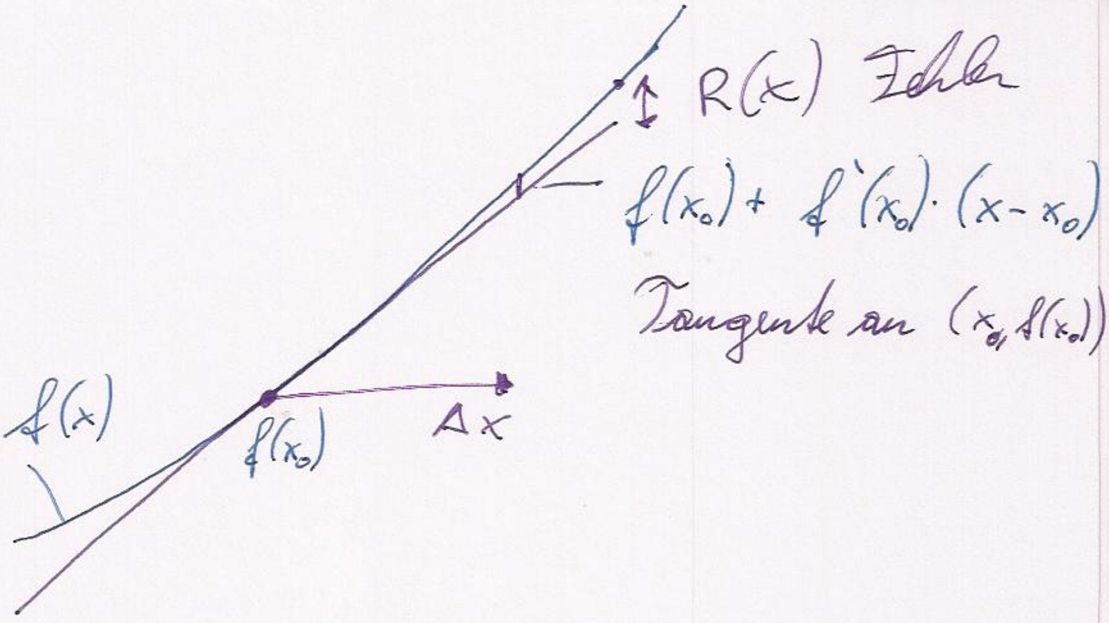
≥ 0

$0 \leq \lim \geq 0$

$\Downarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\| \; f'(x_0)$$



Fkt $f(x)$ lokal um x_0 durch Tangente $f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ angenähert

Fehler $R(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ "klein":

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} - \lim_{x\to x_0} f'(x_0) =$$

$$f'(x_0) - f'(x_0) = \underline{0} \quad \Big| \; R(x) = o(x-x_0)$$

Satz: Fkt. $f(x)$ genau dann differenzierbar in x_0, falls linear approximierbar:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + R(x),$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\text{Tangente}} + R(x) \text{ mit } R(x) = o(x-x_0).$$