Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse für Informatik

Prüfung 24.02.2023

Aufgabe 1 [10 Punkte]

1. Es sei $X_k, k \geq 1$ eine Folge von Zufallsvariablen und Y eine weitere Zufallsvariable. Definieren Sie was es bedeutet,
   a) dass X_k in Verteilung gegen Y konvergiert für $k \to \infty$.
   b) dass X_k in Wahrscheinlichkeit gegen Y konvergiert für $k \to \infty$.

2. Es sei $a \geq 0$ eine Konstante. Sei $Z_k, k \geq 1$ eine Folge von i.i.d. (=unabhängigen, gleichverteilten) stetig verteilten Zufallsvariablen mit Dichte $(a+1)x^a$ auf dem Intervall $[0,1]$. Es sei

$$X_k = k^{1/(a+1)} \min\{Z_1, \ldots, Z_k\}.$$

   Zeigen Sie, dass X_k in Verteilung gegen Y konvergiert, wobei Y eine stetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte $(a+1)y^a e^{-y^{a+1}}[y \geq 0]$ ist.

Aufgabe 2 [8 Punkte]
Beantworten Sie eine der folgenden Fragen:

1. Formulieren und beweisen Sie die Chebyshev'sche Ungleichung. Wenden Sie diese an, um das schwache Gesetz der großen Zahlen für die Summe von i.i.d. Zufallsvariablen mit endlicher Varianz zu beweisen.

2. Formulieren Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung und verwenden Sie diese um zu zeigen, dass für zwei beliebige Ereignisse A, B, $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \sqrt{\mathbb{P}(A)}\sqrt{\mathbb{P}(B)}$ gilt. Wann gilt hier Gleichheit?

Aufgabe 3 [6 Punkte]

1. Formulieren und beweisen Sie den Satz von Bayes.

2. Wenden Sie diesen an um die folgende Frage zu beantworten. Es sei C eine Münze mit Kopf Wahrscheinlichkeit p; X_1, X_2 seien zwei unabhängige Kugeln, welche jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/3 schwarz

sind und mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ weiß sind; Y_1, Y_2 seien zwei unabhängige Kugeln die jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ schwarz oder weiß sind. Die Münze C wird geworfen: Erhält man "Kopf", legt man die Kugeln X_1, X_2 in eine Urne, erhält man "Zahl" legt man Y_1, Y_2 in die Urne. Bedingt auf das Ereignis, dass sich zwei weiße Kugeln in der Urne befinden, was ist die Wahrscheinlichkeit $C =$"Kopf"?

Aufgabe 4 [4 Punkte] Betrachten Sie eine Markovkette in stetiger Zeit mit Zustandsraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und infinitesimalem Generator (=infinitesimalem Erzeuger)

$$Q = \begin{pmatrix} -2/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Überprüfen Sie, dass Q tatsächlich ein infinitesimaler Generator ist und geben Sie die Übergangsmatrix P der eingebetteten Markovkette in diskreter Zeit an.

2. Geben Sie die Klassenzerlegung für die Matrix P an und bestimmen Sie ob die Klassen offen oder abgeschlossen sind.