Prüfung 31-1-18 – Aufgabe 1

Gegeben sei folgende Stichprobe der Größe $n=5$

11,9 12,9 14.2 12.5 10.6

i	$x_{(n)}$	$\hat{F}$
1	10,6	$1/5 = 0,2$
2	11,9	$2/5 = 0,4$
3	12,5	0,6
4	12,9	0,8
5	14,2	1

$x_{(i)}$

$x_{(i+1)}$

3. Quartil von Typ 4 bestimmen

$$x_p = x_{(i)} + (np - i)\left(x_{(i+1)} - x_{(i)}\right)$$

falls $\frac{i}{n} < p \leq \frac{i+1}{n}$ $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$

$$\frac{3}{5} < 0,75 \leq \frac{4}{5}$$

$$0,6 < 0,75 \leq 0,8 \checkmark$$

$$x_{0,75} = 12,5 + (5 \cdot 0,75 - 3) \cdot (12,9 - 12,5) = 12,8$$

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$ Stichprobenmittel

$$\overline{x}_n = \frac{11,9 + 12,9 + 14,2 + 12,5 + 10,6}{5} = \frac{62,1}{5} = 12,42$$

Stichprobenvarianz & -streuung:

$$\boxed{s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_n})^2}$$

$$s_n^2 = \frac{1}{4} \cdot (11{,}9 - 12{,}42)^2 + (12{,}9 - 12{,}42)^2 + \ldots + (10{,}6 - 12{,}42)^2 =$$

$$= \frac{6{,}988}{4} = 1{,}747$$

$$s_n = \sqrt{s_n^2} = \sqrt{1{,}747} = 1{,}3218$$

Prüfung 31-1-18 - Aufgabe 2

$n = 13$

$\overbrace{\quad 1 \ldots 6 \quad}^{med = 75}$ $\overbrace{\quad 7 \ldots 13 \quad}^{med = 110}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x_{(i)}$	25	47	70	75	78	83	90	97	102	110	117	140	180

Median

Median

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(n+1 \mid 2)} & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left[x_{n \mid 2} + x_{(n+2) \mid 2)}\right] & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\tilde{x} = x_{(n+1 \mid 2)} = x_{((13+1) \mid 2)} = x_7 = 90 \quad = Q_2$$

untere Hinge $= 75 \quad = Q_1$

obere Hinge $= 110 \quad = Q_3$

$$\text{lower Fence } (LF) = Q_1 - 1{,}5(Q_3 - Q_1)$$
$$= 75 - 1{,}5(110 - 75)$$
$$= 22{,}5$$

$$\text{upper Fence } (UF) = Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1)$$
$$= 110 + 1{,}5 \cdot (110 - 75)$$
$$= 162{,}5$$

[2] Wenn zwei Bahnhöfe 100 km voneinander entfernt sind und ein Zug jeweils die Hälfte der Strecke mit 50 bzw. 150 km/h fährt, beträgt seine durchschnittliche Geschwindigkeit:

- [ ] $\frac{50+150}{2} = 100$ km/h (arithm. Mittel)
- [ ] $(50 \cdot 150)^{1/2} \approx 87$ km/h (geom. Mittel)
- [x] $\frac{2}{\frac{1}{50}+\frac{1}{150}} = 75$ km/h (harm. Mittel)

31 - 1 - 2018 - Aufgabe 3

Teil 2 - Klassische Form

$P(E|T) = 1$

$P(T) = 0{,}5 \qquad P(T^c) = 0{,}5$

$P(E|T^c) = 0{,}2$

$$P(T|E) = \frac{P(E|T) \cdot P(T)}{P(E|T) \cdot P(T) + P(E|T^c) \cdot P(T^c)}$$

$$= \frac{1 \cdot 0{,}5}{1 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}5} = 0{,}8\dot{3} = 83\%$$

odds - Form:

$$\frac{P(T|E)}{P(T^c|E)} = \frac{P(T)}{P(T^c)} \times \frac{P(E|T)}{P(E|T^c)}$$

$$\frac{P(T|E)}{P(T^c|E)} = \frac{0{,}5}{0{,}5} \times \frac{1}{0{,}2}$$

$$= 1 \times 5 = 5$$

$$\frac{P(T|E)}{P(T^c|E)} = 5 \Rightarrow \frac{P(T|E)}{1-P(T|E)} = 5 \quad \Big| \cdot 1-P(T|E)$$

$$P(T|E) = 5 \cdot (1 - P(T|E))$$
$$= 5 - 5\,P(T|E) \quad \Big| + 5P(T|E)$$

$$6 \cdot P(T|E) = 5 \Rightarrow P(T|E) = \frac{5}{6} = 0{,}8\dot{3}$$

Prüfung 31-1-18 - Aufgabe 4

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erwartungswert einer stetigen ZG

$$\boxed{\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx}$$

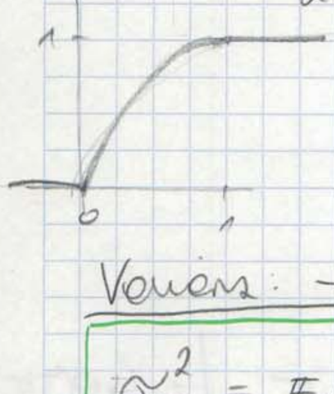
$$\mathbb{E}(x) = \int_0^1 x \cdot (2-2x)\, dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\, dx$$

$$= \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = x^2 - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 \quad 1 - \frac{2}{3} - 0 = 0{,}\dot{3}$$

Verteilungsfkt von X: → Dichtefunktion

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt} = \int_0^x (2 - 2t)\, dt =$$

$$= 2t - \frac{2t^2}{t^2} \Big|_0^x = 2x - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - 0 - 0 =$$



$$F(x) = 2x - x^2 \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Varianz: - Verschiebungssatz für die Varianz

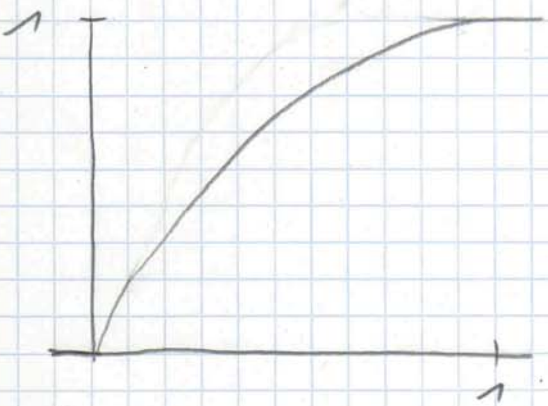
$$\boxed{\sigma_X^2 = \mathbb{E}(X^2) - [E(X)]^2}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot (2 - 2x)\, dx = \int_0^1 2x^2 - 2x^3\, dx$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} \Big|_0^1 \quad \frac{2}{3} - \frac{2}{4} - 0 = 0{,}1\dot{6}$$

$$\sigma_x^2 = 0{,}1\dot{6} - 0{,}\bar{3}^2 = 0{,}0\bar{5}$$

Welche Abbildung?



31 - 1 - 18 - Aufgabe 5

Wenn X die Dichte $f_X(X) = 2x I_{(0,1)}(X)$ hat, wie lautet die Dichte von $Y = X^2$

Indikatorfkt: $f_X(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0,1) \text{ d.h. } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$Y = X^2$

$g(x) = \underbrace{X = \sqrt{Y}}_{g^{-1}(y)}$ $\qquad g^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Jacobian: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{d g^{-1}(y)}{dy} = \dfrac{1}{\frac{d g(x)}{dx}}$

Transformationssatz für Dichten:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{d g^{-1}(y)}{dy} \qquad y \in S_Y$$

$$f_Y(y) = 2 x I_{(0,1)} = 2 \cdot \sqrt{y} \, \frac{d \sqrt{y}}{dy}$$

$$= 2\sqrt{y} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}} = 1$$

von $y \in \underbrace{(0^2, 1^2)}_{\text{wegen } y = x^2}$

Der Träger S_Y von Y ist dabei die Menge
$S_Y = \{ y = g(x) \mid x \in S_X \}$

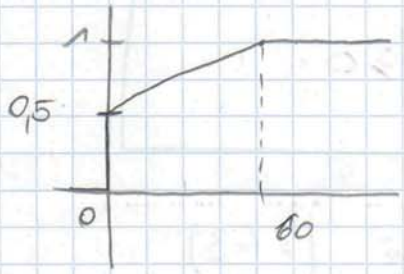
$$f_Y(y) = 1 \cdot I_{(0,1)} \qquad \text{(Träger)}$$

Prüfung 31-1-18 – Aufgabe 5

Aufgabe a: Fußgängerampel

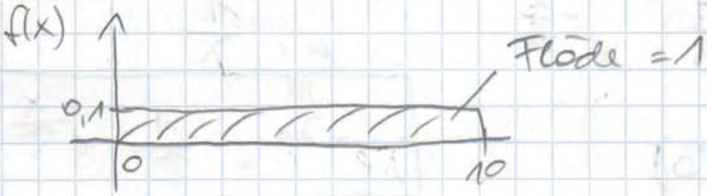
Die W, dass man warten muss ist 50%.

Die korrekte Antwort ist Grafik 2



Aufgabe c: Seitenlänge eines Würfels

Würfel: uniform Verteilt bedeutet $\frac{1}{10}$ also 0,1 für die Breite



$$\boxed{E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx}$$

$$f x = 0{,}1 \cdot I_{(0,10)}$$

$$V = x^3$$

$$E(X^3) = \int_0^{10} (x^3 \cdot 0{,}1)\,dx = 0{,}1 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^{10} \; 0{,}1 \cdot \frac{10\,000}{4} = 250$$

Aufgabe d: R-commands

Exponentialverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-x/\tau} \quad \text{für } x \geq 0$$

Setzt man $\lambda = 1/\tau$ lautet die Dichte:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{für } x \geq 0$$

$$F^{-1}(u) = -3 \ln(1-u) = x \quad | : (-3)$$

$$\ln(1-u) = -\frac{x}{3} \quad | e$$

$$1 - u = e^{-\frac{x}{3}}$$

$$u = 1 - e^{-\frac{x}{3}} = F(x)$$

$$f(x) = F'(x) = -e^{-\frac{x}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{\lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{x}{\tau}}}$$

$$\tau = 3$$

$$X \sim Exp(3)$$

$$X \sim Exp(\tau = 3)$$

Aufgabe 6 – Prüfung 31-1-18

Aufgabe a: Geburtstag

Variante 1: $p(\geq 1 \text{ Geb. Tag}) = 1 - p(\text{kein Geb Tag})$
$$= 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{200}$$

Variante 2: $n = 200$ $\quad X \sim Bin\left(200, \frac{1}{365}\right)$
$p = \frac{1}{365}$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) =$$
$$= 1 - \binom{200}{0} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^0 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{200}$$
$$= 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{200}$$

Variante 3: Für $n \geq 50$, $p \leq 1/10$ und $np \leq 10$ gilt $X \sim B(n,p)$:

$$\boxed{P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{np^x e^{-np}}{x!}}$$

$$X \sim Bin(\underbrace{200}_{n}, \underbrace{\tfrac{1}{365}}_{p})$$

$$X \sim Poi(\lambda = n p) = X \sim Poi\left(\frac{200}{365}\right)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\overbrace{\left(\frac{200}{365}\right)^0}^{1} \cdot e^{-\frac{200}{365}}}{\underbrace{0!}_{1}}$$
$$= 1 - e^{-\frac{200}{365}}$$

Prüfung 31-1-18 – Aufgabe 6

Aufgabe 6 – $X \sim Exp(\lambda = 2)$

Für $X \sim Exp(\lambda)$ gilt

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t) \quad \text{für } s,t > 0$$

Memoryless Property | Gedächtnislosigkeit S 165ff.

Exponentialverteilung + Dichte: S 165

Setzt man $\lambda = \frac{1}{\tau}$, lautet die Dichte wie folgt

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{für } x \geq 0$$

Verteilungsfunktion:

Die Verteilungsfunktion von $X \sim Exp(\lambda)$ ist gegeben durch

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{für } x \geq 0$$

Memoryless Property

$$P(X > 3 \mid X > 1) = P(X > \overset{3-1=2}{2}) = 1 - P(X \leq 2) =$$

$$= 1 - F(2) =$$

$$= 1 - \left[1 - e^{-\lambda 2}\right]$$

$$= e^{-\lambda 2}$$

31-1-18 – Aufgabe 6

Aufgabe c – logische Struktur eines Systems

S209 – Bsp 5.16

$\lambda_1 = \frac{1}{10h}$ $\lambda_2 = \frac{1}{10h}$ $\lambda_3 = \frac{1}{20h}$

— [10h] — [10h] — [20h] —

Wir berechnen das Minimum $X = \min\{X_1, X_2, X_3\}$

$$F_{min}(y) = P(Y_1 \leq y) = 1 - P(Y_1 > y)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - P(X_i \leq y)\right]$$

$$F_{min}(y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - F_i(y)\right]$$

Für $X_1, \dots X_n$ iid $Exp(\lambda)$ (oder $Exp(T)$) ist F_{min} gegeben durch:

$$F_{min}(y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - (1 - e^{-\lambda y})\right]$$

$$= 1 - e^{-n\lambda y} \quad \text{für } y > 0$$

$$F_{min}(y) = 1 - e^{-\lambda_1 y} \cdot e^{-\lambda_2 y} \cdot e^{-\lambda_3 y} =$$
$$= 1 - e^{-\frac{y}{10h}} \cdot e^{-\frac{y}{10h}} \cdot e^{-\frac{y}{20h}}$$
$$= 1 - e^{-\left[\frac{x}{10h} + \frac{x}{10h} + \frac{x}{20h}\right]}$$
$$= 1 - e^{-\frac{5x}{20h}}$$

Dichte:

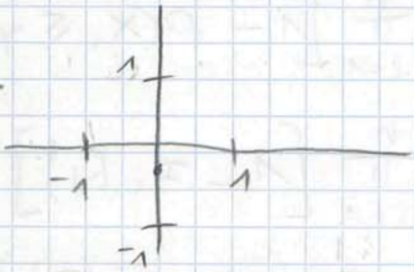
$$f_X(x) = -e^{\frac{-5x}{20h}} \cdot \left(\frac{-5}{20h}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{5}{20h}}_{\lambda} \cdot e^{\underbrace{-\frac{5}{20h}}_{\lambda} \cdot x}$$

$$\rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{5}{20h}} = 4h$$

Aufgabe D – Korrelationskoeffizient

$$Y = \frac{X-1}{3}$$



Korrelationskoeffizient = 1

Prüfung 31-1-18 – Aufgabe 7

Aufgabe a – 4-seitiger Würfel

?

Aufgabe b – $Var(X) = Var(Y) = \sigma^2$

$$Var(X-Y) - Var(X+(-Y)) \underset{X,Y \text{ u a}}{\overset{\uparrow}{=}} Var(X) + Var(-Y) =$$

$$= Var(X) + (-1)^2 \cdot Var(Y) =$$
$$= Var(X) + V(Y) = 2 \cdot \sigma^2$$

Aufgabe c – $N(3, 10)$

S 228 Bsp 6.1 [Stichprobenmittelwert]

$$\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot X_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\frac{n \cdot \mu}{n} = \mu \qquad \frac{10 \cdot 3}{10} = 3$$

$$\frac{n\,\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\boxed{\bar{X} \sim N(3,1)}$$

Aufgabe 7 – d) – Wartezeit:

$$\text{Gam}\left(4, \lambda = \frac{1}{5}\right) \to \text{Verteilung}$$

Wartezeit: 20 min $\quad X \sim \text{Gam}(a, b) \to E(X) = \frac{a}{b} = \frac{4}{\frac{1}{5}} = 20$

Aufgabe 8 – a – schw. GGz

$$\overline{X_n} \xrightarrow{P} \lambda$$

Aufgabe b – Münze: S245

$n = 50$

$p = \frac{1}{2}$ (für Kopf)

$X(\text{Anzahl Kopf}) \sim \text{Bin}\left(50, \frac{1}{2}\right)$

$\to X \sim N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1-p))$

$X \sim N(25, 12{,}5)$

$$P(X \leq 20) = \Phi\left(\frac{20 + 0{,}5 - 50 \cdot 0{,}5}{\sqrt{50 \cdot 0{,}5(1-0{,}5)}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{-4{,}5}{3{,}53}\right) = \Phi(-1{,}27)$$

$$= 1 - \Phi(1{,}27)$$

$$= 1 - 0{,}8980 = 0{,}102$$

Prüfung 31-1-2018 - Aufgabe 8

c) $\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$ S 245

Aufgabe d) - ML-Schätzer

$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda} = \overline{X}_n$

Exponentialfkt:

$$\int_0^{\tilde{x}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Big|_0^{\tilde{x}} = -e^{-\lambda x} \Big|_0^{\tilde{x}}$$

$$= -e^{-\lambda \tilde{x}} - (-1) = 1 - e^{-\lambda \tilde{x}} = \frac{1}{2}$$ wegen Median

$$= 1 - e^{-\lambda \tilde{x}} = \frac{1}{2} \quad | -1$$

$$= -e^{-\lambda \tilde{x}} = -\frac{1}{2} \quad | \cdot (-1)$$

$$= e^{-\lambda \tilde{x}} = \frac{1}{2} \quad | \ln$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{u}{v}\right) = (\lg u - \lg v)}$$

$$= -\lambda \tilde{x} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\tilde{x} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-\lambda}$$

$$\boxed{\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}_n}}$$

$$\tilde{x} = \frac{\overbrace{\ln 1}^{0} - \ln 2}{-\lambda}$$

$$\tilde{x} = \frac{\ln 2}{\lambda} \underset{\text{schätzen}}{\rightarrow} \hat{\tilde{x}}_{ML} = \frac{\ln 2}{\hat{\lambda}_{ML}} = \frac{\ln 2}{\frac{1}{\overline{X}_n}} =$$

$$= \ln 2 \cdot \overline{X}_n = \hat{\tilde{X}}_{ML}$$

Aufgabe 9 – Prüfung 31-1-18

Hypothese ?

H_0: mean ≤ 500 $\qquad$ H_1: mean > 500

H_0 wird nicht verworfen

$$p = 0{,}07412 > 0{,}05 \ (5\%)$$

→ H_0 beibehalten !

Aufgabe 6 : – Stichproben aus Normalverteilung

$$\boxed{S_p^2 = \frac{(m-1) \cdot s_x^2 + (n-1) \cdot s_y^2}{m+n-2}}$$

S276

$$= \frac{(6-1) \cdot 11{,}3^2 + (8-1) \cdot 8{,}3^2}{6+8-2} = \frac{1120{,}68}{12} = 93{,}39$$

Konfidenzintervall für $\mu_x - \mu_y$

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{m+n-2\,;\,1-\alpha/2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

$$40{,}3 - 21{,}4 \pm t_{12\,;\,1-0{,}05/2} \cdot \sqrt{93{,}39} \cdot \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{8}}$$

$$40{,}3 - 21{,}4 \pm 2{,}179 \cdot \sqrt{93{,}39} \cdot \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{8}}$$

$$18{,}9 \pm 11{,}372$$

$[7{,}53 \,;\, 30{,}3]$ 95% Konfidenzintervall

Prüfung 31-1-18 - Aufgabe 10

Wald-Intervall / Standardintervall

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0{,}65 \pm z_{1-0{,}05/2} \sqrt{\frac{0{,}65 \cdot (1-0{,}65)}{100}}$$

$$0{,}65 \pm z_{0{,}975} \cdot 0{,}047$$

$$0{,}65 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}047$$

$$[0{,}557 ; 0{,}743]$$

Aufgabe b - Chiquadrat-Anpassungstest:

	K	Z	Σ
beob.	32	18	50
erwartet	25	25	50 (symmetrisch)

$$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - np_{i0})^2}{np_{i0}}$$

H_0 wird verworfen falls: $Q_{k-1} > \chi^2_{k-1;1-\alpha}$

$k=2$

$$Q_{k-1} = \frac{(32-25)^2}{25} + \frac{(18-25)^2}{25} = 3{,}92$$

$$\chi^2_{2-1;1-0{,}05} = \chi^2_{1;0{,}95} = 3{,}841$$

$3{,}92 > 3{,}841 \Rightarrow H_0$ wird verworfen

Aufgabe c

p-Wert (8 oder mehr Erfolge $\mid p=\frac{2}{3}, n=10$)

$= 1 - p$ (≤ 7 Erfolge $\mid p=\frac{2}{3}, n=10$)

$= \boxed{1 - \text{pbinom}(7, 10, 2/3)}$