19. Man zeige, dass das Vektorfeld $\vec{f}(x,y)=\left(y^{\alpha-1},(\alpha-1)xy^{\alpha-2}\right)$ eine Stammfunktion besitzt und berechne diese.

$$\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y^{\alpha-1} \\ (\alpha-1)xy^{\alpha-2} \end{pmatrix}$$

Integrabilitätsbedingung: $\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial x} \rightarrow \vec{f}$ ist ein Gradientenfeld und es existiert eine Stammfunktion $F(x,y)$ mit $F_x=f_1$ und $F_y=f_2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=(\alpha-1)\cdot y^{\alpha-1-1}=(\alpha-1)\cdot y^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=(\alpha-1)\cdot 1\cdot y^{\alpha-2}=(\alpha-1)\cdot y^{\alpha-2}$$

$$F_x=f_1 \rightarrow F=\int f_1 dx=\int\left(y^{\alpha-1}\right)dx=x\cdot y^{\alpha-1}+c(y)$$

$$F_y=f_2 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x\cdot y^{\alpha-1}+c(y)\right)=(\alpha-1)xy^{\alpha-2}$$

$$x\cdot(\alpha-1)\cdot y^{\alpha-2}+c'(y)=(\alpha-1)xy^{\alpha-2}$$

$$c'(y)=1 \rightarrow c(y)=0+c,\ c\in R$$

also wäre das Integral: $F(x,y)=x\cdot y^{\alpha-1}+c$ wobei $c\in R$