# 5 Übergeordnete Begriffe: Arbeit und Energie

## 5.1 Arbeit und Leistung

Bei der Definition des Begriffes Arbeit geht man von einer elementaren Vorstellung aus: Zur Verschiebung eines Klotzes um eine Strecke $x$ benötigt man eine Kraft $F$. Die verrichtete Arbeit $W$ („work") ist um so größer, je größer die aufgewendete Kraft und je größer der zurückgelegte Weg ist.

Definition: Arbeit = Kraft × Weg

Ersichtlich ist dabei nur die dem Weg parallele Kraftkomponente $F_x$ von Bedeutung:

$$W = F_x \cdot x = F \cdot x \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{x}. \tag{5.1}$$

Einheit: Newtonmeter = N m = Joule = J.

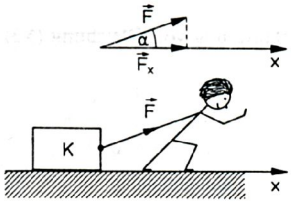


*Fig. 5.1:* Zur Definition der Arbeit: Ein Körper wird mit einer angreifenden Kraft (z. B. gegen die Reibung) um ein Wegstück verschoben.

Kraft und Weg sind Vektoren, die Arbeit ist ein Skalar.

$W > 0$ bedeutet: Die Kraft $\vec{F}$ besitzt eine Komponente in Richtung des Weges; die Kraft $F$ verrichtet die Arbeit $W$.

$W < 0$ bedeutet: Die Kraft besitzt eine Komponente in Gegenrichtung des Weges; es wird Arbeit gegen die Kraft $F$ verrichtet.

Ist – wie in Fig. 5.2 angedeutet – die Kraft vom Weg abhängig, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, dann hat man zur Ermittlung der Arbeit den Weg in genügend kleine Teilstücke $\Delta\vec{s}$ zu unterteilen, auf denen die Kraft $\vec{F}$ konstant gesetzt werden kann. Die Gesamtarbeit ergibt sich dann durch Summation

$$W = \vec{F}_1\Delta\vec{s}_1 + \vec{F}_2\Delta\vec{s}_2 + \cdots = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i = \sum_i \Delta W_i,$$

oder im Grenzfall $\Delta\vec{s}_i \to 0$ durch Integration:

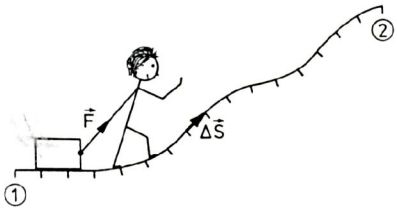


*Fig. 5.2:* Die zum Verschieben eines Körpers notwendige Kraft kann vom Weg abhängen. Dann muß zur Berechnung der Arbeit integriert werden.

$$W = \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}W = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s}. \tag{5.2}$$

Die Integration erfolgt hier i. a. längs eines krummlinigen Weges vom Ort (1) zum Ort (2). Man nennt ein solches Integral ein *Linienintegral*. Es stellt eine Verallgemeinerung des bekannten Integrals längs einer geraden Linie (z. B. der $x$-Koordinaten) dar. In allen vorkommenden Fällen werden wir durch Wahl eines geeigneten Bezugssystems längs gerader Linien oder längs Kreisen integrieren können. Das Skalarprodukt unter dem Integral bedeutet stets, daß nur die wirksame Kraftkomponente in Richtung des Weges oder die Wegkomponente in Richtung der Kraft einzusetzen ist:

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int F(\vec{r}) \cdot \cos(\vec{F}, \mathrm{d}\vec{s}) \cdot \mathrm{d}s \\ &= \int F_{\parallel}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}s = \int F(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}s_{\parallel}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

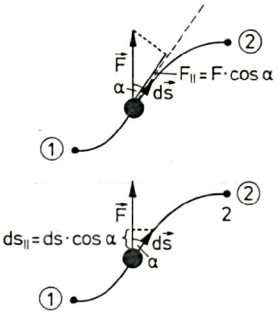


*Fig. 5.3:* Zur Erläuterung von Gleichung (5.3)

Die in der Zeiteinheit verrichtete Arbeit nennt man *Leistung* $P$ („power"):

$$\textit{Leistung:} \quad P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \dot{W} \qquad \text{Einheit: Watt} = \mathrm{W} \tag{5.4}$$

Unter Verwendung der Definitionsgleichung $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ kann man dafür auch schreiben:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v}. \tag{5.5}$$

Die Leistung ist wie die Arbeit eine skalare Größe. Ihre Einheit ist $1\,\mathrm{N\,m/s} = 1\ \mathrm{Watt} = 1\ \mathrm{W}$[1]. Eine alte, nicht ins SI-System passende Leistungseinheit ist die Pferdestärke: $1\,\mathrm{PS} = 75\,\mathrm{m \cdot kp} = 0{,}735\,\mathrm{kW} \approx 3/4\,\mathrm{kW}$. Sie wird heute auch in der Technik (Leistungsangaben von Kraftwagen) mehr und mehr durch die metrische Einheit ersetzt. Ein Mensch vermag über längere Zeit eine mechanische Leistung von ca. 100 W zu erbringen, nur über die sehr kurze Zeit von einigen Sekunden kann die Leistung Werte von 1000 W erreichen.

## 5.2 Beispiele für Arbeiten

### (a) Hubarbeit

Ein Körper mit der Masse $m$ soll über die Strecke $h$ in die Höhe gehoben werden. Dazu benötigt man eine Kraft $\vec{F}$, die der Gewichtskraft $\vec{G}$ entgegengerichtet ist. Wählt man ein Bezugssystem, bei dem die Wegkoordinate nach oben gerichtet ist (vgl. Fig. 5.4), dann gilt

[1] James Watt 1736–1819

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g} = -m \cdot g \cdot \hat{s} \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = -\vec{G} = +m \cdot g \cdot \hat{s}. \tag{5.6}$$

($\hat{s}$: Einheitsvektor in Richtung des Weges)

Für die Hubarbeit ergibt sich demnach:

$$W_H = \int_{s=0}^{h} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int m \cdot g \cdot \hat{s} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^h m \cdot g \cdot \mathrm{d}s = m \cdot g \cdot h. \tag{5.7}$$

$$\boxed{\textit{Hubarbeit:} \quad W_H = m \cdot g \cdot h.} \tag{5.8}$$

Die Hubarbeit $W_H$ wird im $(F, s)$-Diagramm durch die Fläche unter der Kurve $F = F(s) = mg = const.$ repräsentiert.

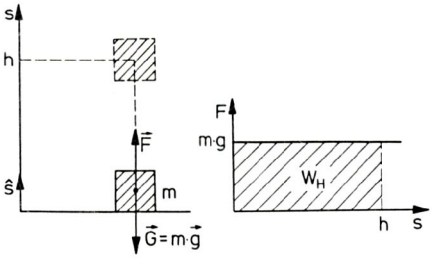


*Fig. 5.4:* Zur Berechnung der Hubarbeit $W_H$: Sie ergibt sich als Fläche unter der $F(s)$-Kurve im Kraft-Weg-Diagramm.

**(b) Spannarbeit**

Eine Feder mit der Federkonstanten $D$, die einem linearen Kraftgesetz gehorcht, soll um eine Strecke $x_0$ gedehnt werden. Die dazu notwendige Kraft $\vec{F}$ ist der von der Feder ausgeübten Kraft $\vec{F}_F$ entgegengerichtet. Es gilt:

$$\vec{F}_F = -D \cdot \vec{x} = -D \cdot x \cdot \hat{x} \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = -\vec{F}_F = +D \cdot \vec{x}. \tag{5.9}$$

Die Spannarbeit erhält man wieder durch Auswertung des Arbeitsintegrals:

$$W_s = \int_0^{x_0} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int D\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_0^{x_0} Dx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} D x_0^2. \tag{5.10}$$

$$\boxed{\textit{Spannarbeit:} \quad W_s = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2.} \tag{5.11}$$

Diesmal hängt die Kraft vom Weg $x$ (der Federdehnung) ab; die Spannarbeit kann wie im Beispiel (a) durch die Fläche unter $F(s) = F(x)$-Kurve veranschaulicht werden.

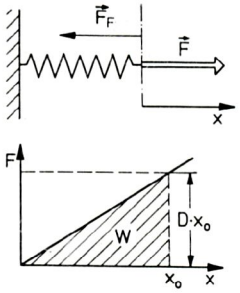


*Fig. 5.5:* Zur Berechnung der Spannarbeit $W_s$ bei einer Feder. Bei diesem Beispiel ist die Kraft vom Weg abhängig.

**(c) Beschleunigungsarbeit**

Ein Körper mit der Masse $m$ soll durch Anwendung einer konstanten Kraft $\vec{F}$ aus dem Ruhezustand heraus auf eine Geschwindigkeit $v_0$ beschleunigt werden. Die dazu notwendige Kraft $\vec{F}$ ist der Trägheitskraft $\vec{F}_{tr}$ entgegengerichtet:

$$\vec{F}_{tr} = -m \cdot \vec{a} = -m \cdot a \cdot \hat{x} \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = -\vec{F}_{tr} = +m \cdot \vec{a}. \tag{5.12}$$

Es wird *mit* der Kraft $\vec{F}$ bzw. *gegen* die Kraft $\vec{F}_{tr}$ Arbeit verrichtet. Man erhält sie wie in den vorigen Beispielen:

$$W_B = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int F \cdot \mathrm{d}x = \int_0^{x_0} m \cdot a \cdot \mathrm{d}x = m \cdot a \cdot x_0, \tag{5.13}$$

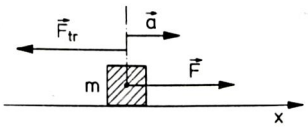


*Fig. 5.6:* Eine Kraft verrichtet an einem beweglichen Körper Beschleunigungsarbeit

weil $m \cdot a$ als konstanter Faktor aus dem Integral herausgezogen werden kann. Der Körper führt unter der Einwirkung der Kraft eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus, die nach dem Weg-Zeit-Gesetz

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

mit der ständig wachsenden Geschwindigkeit $v = a \cdot t$ erfolgt. Nimmt man an, daß bis zum Ort $x_0$ die Zeit $t_0$ verflossen und die Geschwindigkeit $v_0$ erreicht ist, dann kann man aus diesen beiden Beziehungen $t_0$ eliminieren und $x_0$ direkt mit $v_0$ in Verbindung bringen:

$$x_0 = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Man erhält die

$$\boxed{\textit{Beschleunigungsarbeit:} \quad W_B = \frac{1}{2} \cdot m v_0^2.} \tag{5.14}$$

In diesem Ausdruck treten die Beschleunigung $a$ und die Kraft $m \cdot a$ nicht mehr explizit auf. Die Beschleunigungsarbeit hängt nur noch von der erreichten Geschwindigkeit $v_0$ ab und nicht mehr von der aufgewendeten Kraft. Es ist gleichgültig, ob eine große Kraft kurzzeitig oder eine kleine Kraft über längere Zeit wirkt, um dem Körper die Endgeschwindigkeit $v_0$ zu vermitteln. Sie darf sich sogar unterwegs zeitlich ändern. Dies wird deutlich, wenn man das Arbeitsintegral etwas anders auswertet und die Variablensubstitution $x \to v$ bereits unter dem Integral vornimmt:

$$\begin{aligned} W_B &= \int m \cdot a(t) \cdot \mathrm{d}x = m \cdot \int \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot v \, \mathrm{d}t \\ &= m \cdot \int v \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Man gelangt zum gleichen Ergebnis wie oben; über die Zeitabhängigkeit der Beschleunigung braucht man keine Annahme zu machen.

## 5.3 Energie und Energiesatz

In allen besprochenen Beispielen wurde an einem Körper (allgemeiner: an einem mechanischen System) Arbeit verrichtet; es wurde ihm Arbeit zugeführt. Man hat ihm damit die Möglichkeit gegeben, selbst Arbeit zu verrichten. Das, was man damit im System gespeichert hat, nennt man *Energie* und bezeichnet es mit dem Buchstaben $E$. Arbeit und Energie besitzen die gleiche physikalische Einheit, nämlich N m = J. *„Energie" ist eine Zustandsgröße*; Energie wird im System gespeichert. *„Arbeit" ist eine Transportgröße*, also das, was übergeben wird.

Durch Zufuhr von Beschleunigungsarbeit wird die kinetische Energie (=Bewegungsenergie) des Systems verändert.

$$\textit{Kinetische Energie:}\quad E_k = \frac{1}{2}mv^2, \qquad \text{Einheit:}\quad \mathrm{N\,m}. \tag{5.16}$$

In den beiden anderen Fällen erhält das System potentielle Energie.

$$\textit{Potentielle Energien:}\quad \begin{cases} \textit{Lageenergie:}\quad E_p = m \cdot g \cdot h \\ \textit{Spannenergie:}\quad E_p = \frac{1}{2}D \cdot x_0^2 \end{cases} \tag{5.17}$$

Die Zusammenfassung aller beschriebenen Einzelfälle führt zur Formulierung des Energiesatzes.

*Energiesatz der Mechanik:*

*Durch Zufuhr von Arbeit ($\Delta W > 0$) wird die Energie eines Systems vergrößert.*

*Durch Abfuhr von Arbeit ($\Delta W < 0$) wird die Energie eines Systems verringert.*

*Im System kann die Energie in Form von potentieller oder kinetischer Energie vorliegen:*

$$\Delta W = \Delta E_p + \Delta E_k. \tag{5.18}$$

Ist eine Zu- oder Abfuhr von Arbeit nicht möglich, dann nennt man das System *abgeschlossen.* Dann gilt als Spezialfall des Energiesatzes der

*Energieerhaltungssatz der Mechanik:*

*In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie, d. h. die Summe aus potentieller und kinetischer Energie konstant.*

$$\Delta E_p + \Delta E_k = \Delta E_{ges} = 0 \quad \textit{oder} \quad E_p + E_k = E_{ges} = \textit{const.} \tag{5.19}$$

Der Energiesatz (und seine Spezialisierung, der Energieerhaltungssatz) ist der erste der drei großen fundamentalen Sätze der Mechanik. Er ist ein Erfahrungssatz und nicht beweisbar. Akzeptiert man die Energie und ihre Transportform, die Arbeit, als eine mengenhafte Größe, dann ist im Energiesatz ein Faktum festgehalten, das an Einfachheit schlicht nichts mehr zu wünschen übrigläßt: Man hat ein mechanisches System, bringt etwas hinein, das man Arbeit nennt und konstatiert, daß man dadurch im Innern des Systems ein dimensionsgleiches Etwas vergößert hat, das man Energie nennt („innere Energie").

**Bemerkung:** Wir haben hier streng zwischen der Transportgröße „Arbeit" und d Speichergröße „Energie" unterschieden. Man sollte den Unterschied zur Kenntn nehmen. Wie so oft hält man sich im täglichen Sprachgebrauch nicht immer a diese Unterscheidung und spricht z. B. verkürzend von einem „Energieübertrag wenn man einem System Energie entnimmt und in ein anderes überführt. Dabei h man nur den Anfangs- und den Endzustand der beiden Systeme im Auge. Bei d „Übertragung von Energie" wird natürlich „Arbeit verrichtet".

Ein mechanisches System ist dann im Sinne des Energieerhaltungssatz abgeschlossen, wenn ihm keine Arbeit zugeführt oder entnommen werd kann. Man kann ein mechanisches System nur dann abschließen, wenn inne halb seiner Grenzen nur *konservative* (= die mechanische Energie erhaltend Kräfte wirken. Das Auftreten *dissipativer* (= die mechanische Energie ve nichtender) Kräfte muß daher ausgeschlossen werden. In diese Kategor fallen vor allem Reibungskräfte, die mechanische Energie in Wärme umse zen, die selbst mit mechanischen Mitteln nicht im System gehalten werd kann. Man kann natürlich die Wärme in den Energiesatz miteinbeziehe überschreitet jedoch damit die Grenzen der Mechanik.

## 5.4 Beispiele

Zur Erläuterung dieses wichtigen Satzes betrachten wir noch einmal Fälle (a) bis (c) des Abschnitts 5.2. In den Fällen (a) und (b) wur die Arbeitsverrichtung stillschweigend so vorgenommen, daß die Körp keine merklichen Geschwindigkeiten erhielten, die kinetische Energie a vernachlässigbar war: Man erhielt einen Teil des Energiesatzes (5.18), $\Delta W$ $\Delta E_p$. Im Fall (c) wurde der Körper durch die äußere Kraft $\vec{F}$ auf ei waagerechten Unterlage beschleunigt; diesmal waren potentielle Energ nicht im Spiel: Man erhielt den zweiten Teil des Energiesatzes, $\Delta W = \Delta$

Läßt man an dem Körper der Fig. 5.4 eine Kraft $\vec{F}$ angreifen, die größer als die Gewichtskraft, dann wird an diesem System die Arbeit $\Delta W$ verrich die man dann sowohl im kinetischen wie im potentiellen Teil der Ener wiederfindet. Der Energiesatz (5.18) sagt dann:

$$\Delta W = \int F\,\mathrm{d}s = \underbrace{(E_p(h) - E_p(0))}_{\Delta E_p} - \underbrace{(E_k(h) - E_k(0))}_{\Delta E_k}. \qquad (5.$$

Nimmt man nun an, daß bei $s = 0$ der Körper zunächst ruht, dort die tentielle Energie $E_p(0) = 0$ besitzt und die angreifende Kraft konstant gle $F_0$ ist, dann kann man hieraus z. B. die Geschwindigkeit $v(h)$ ausrechn mit der der Körper oben ankommt:

$$\Delta W = F_0 \cdot h = \frac{1}{2}mv^2(h) + mgh,$$

$$v(h) = \sqrt{\frac{2(F_0 - mg)h}{m}}. \qquad (5$$

Man sieht: Wenn $F_0$ genauso groß ist wie die Gewichtskraft, dann $v(h) = 0$.

An den beiden Beispielen (a) und (b) von Abschnitt 5.2 läßt sich trefflich demonstrieren, wie der Energieerhaltungssatz (5.19) bei der Lösung physikalischer Probleme einzusetzen ist. Notwendige Voraussetzung ist, daß die Systeme (nach dem Hochheben des Körpers, nach dem Spannen der Feder) abgeschlossen sind.

**Zu Beispiel (a):**

Der Körper, der zunächst auf die Höhe $h$ gehoben worden war, wird losgelassen. Das System, das hier nur aus dem Körper besteht, ist dann abgeschlossen; es muß (5.19) gelten, wenn man die beiden Zustände (1), d. h. Körper auf der Höhe $h$, und (2), d. h. Körper auf der Höhe $s$, betrachtet:

$$E_p^{(1)} + E_k^{(1)} = E_p^{(2)} + E_k^{(2)} = E_{ges} = const., \tag{5.22}$$

$$mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgs + \frac{1}{2}mv_2^2 = E_{ges}. \tag{5.23}$$

Wenn man jetzt noch spezifiziert, daß der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = 0$ startet, dann könnte man z. B. die Geschwindigkeit $v = v_2$ auf der Höhe $s$ ausrechnen:

$$v = \sqrt{2g(h-s)}. \tag{5.24}$$

Man kann in Gl. (5.22) die potentiellen Energien auf die linke Seite schreiben und die kinetischen Energien auf der rechten Seite sammeln:

$$E_p^{(1)} - E_p^{(2)} = mgh - mgs = \frac{1}{2}mv^2. \tag{5.25}$$

Das Umschreiben der Terme hat zur Folge, daß man nun die kinetische Energie als etwas äußeres ansieht. Die potentielle Energie des Systems ($\Delta E_p = E_p^{(2)} - E_p^{(1)} < 0$) nimmt ab; die Gewichtskraft verrichtet am Körper Beschleunigungsarbeit.

$$-\Delta E_p = \int_{(1)}^{(2)} \vec{G} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}mv^2. \tag{5.26}$$

In Worten:

*Die Abnahme der potentiellen Energie ist gleich der vom System verrichteten Arbeit.*

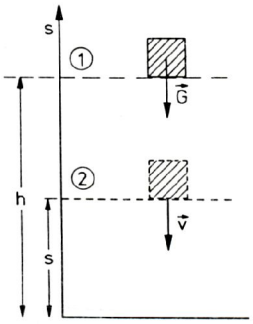


*Fig. 5.7:* Anwendung des Energieerhaltungssatzes auf ein abgeschlossenes System: Ein im Schwerefeld der Erde auf die Höhe $h$ gehobener Körper wird losgelassen.

**Zu Beispiel (b):**

Wieder wird Gl. (5.22) für die beiden in Fig. 5.8 markierten Zustände aufgeschrieben:

$$\frac{1}{2}Dx_0^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv_2^2. \tag{5.27}$$

Wenn man auch hier angibt, mit welcher Geschwindigkeit $v_1$ der Körper starten soll, dann läßt sich wieder die Geschwindigkeit $v = v_2$ für jede Koordinate $x$ ausrechnen; sei z. B. $v_1 = 0$.

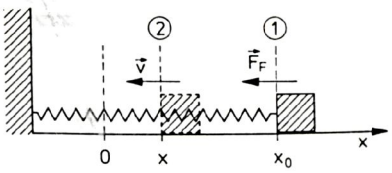


*Fig. 5.8:* Anwendung des Energieerhaltungssatzes: Ein am Ende der gespannten Feder von Fig. 5.5 angebrachter Körper gleitet reibungsfrei auf seiner Unterlage.

**Bemerkung:** Wir haben hier streng zwischen der Transportgröße „Arbeit" und der Speichergröße „Energie" unterschieden. Man sollte den Unterschied zur Kenntnis nehmen. Wie so oft hält man sich im täglichen Sprachgebrauch nicht immer an diese Unterscheidung und spricht z. B. verkürzend von einem „Energieübertrag", wenn man einem System Energie entnimmt und in ein anderes überführt. Dabei hat man nur den Anfangs- und den Endzustand der beiden Systeme im Auge. Bei der „Übertragung von Energie" wird natürlich „Arbeit verrichtet".

Ein mechanisches System ist dann im Sinne des Energieerhaltungssatzes abgeschlossen, wenn ihm keine Arbeit zugeführt oder entnommen werden kann. Man kann ein mechanisches System nur dann abschließen, wenn innerhalb seiner Grenzen nur *konservative* (= die mechanische Energie erhaltende) Kräfte wirken. Das Auftreten *dissipativer* (= die mechanische Energie vernichtender) Kräfte muß daher ausgeschlossen werden. In diese Kategorie fallen vor allem Reibungskräfte, die mechanische Energie in Wärme umsetzen, die selbst mit mechanischen Mitteln nicht im System gehalten werden kann. Man kann natürlich die Wärme in den Energiesatz miteinbeziehen, überschreitet jedoch damit die Grenzen der Mechanik.

## 5.4 Beispiele

Zur Erläuterung dieses wichtigen Satzes betrachten wir noch einmal die Fälle (a) bis (c) des Abschnitts 5.2. In den Fällen (a) und (b) wurde die Arbeitsverrichtung stillschweigend so vorgenommen, daß die Körper keine merklichen Geschwindigkeiten erhielten, die kinetische Energie also vernachlässigbar war: Man erhielt einen Teil des Energiesatzes (5.18), $\Delta W = \Delta E_p$. Im Fall (c) wurde der Körper durch die äußere Kraft $\vec{F}$ auf einer waagerechten Unterlage beschleunigt; diesmal waren potentielle Energien nicht im Spiel: Man erhielt den zweiten Teil des Energiesatzes, $\Delta W = \Delta E_k$.

Läßt man an dem Körper der Fig. 5.4 eine Kraft $\vec{F}$ angreifen, die größer ist als die Gewichtskraft, dann wird an diesem System die Arbeit $\Delta W$ verrichtet, die man dann sowohl im kinetischen wie im potentiellen Teil der Energie wiederfindet. Der Energiesatz (5.18) sagt dann:

$$\Delta W = \int F\,\mathrm{d}s = \underbrace{(E_p(h) - E_p(0))}_{\Delta E_p} - \underbrace{(E_k(h) - E_k(0))}_{\Delta E_k}. \tag{5.20}$$

Nimmt man nun an, daß bei $s = 0$ der Körper zunächst ruht, dort die potentielle Energie $E_p(0) = 0$ besitzt und die angreifende Kraft konstant gleich $F_0$ ist, dann kann man hieraus z. B. die Geschwindigkeit $v(h)$ ausrechnen, mit der der Körper oben ankommt:

$$\Delta W = F_0 \cdot h = \frac{1}{2}mv^2(h) + mgh,$$

$$v(h) = \sqrt{\frac{2(F_0 - mg)h}{m}}. \tag{5.21}$$

Man sieht: Wenn $F_0$ genauso groß ist wie die Gewichtskraft, dann ist $v(h) = 0$.

An den beiden Beispielen (a) und (b) von Abschnitt 5.2 läßt sich trefflich demonstrieren, wie der Energieerhaltungssatz (5.19) bei der Lösung physikalischer Probleme einzusetzen ist. Notwendige Voraussetzung ist, daß die Systeme (nach dem Hochheben des Körpers, nach dem Spannen der Feder) abgeschlossen sind.

**Zu Beispiel (a):**

Der Körper, der zunächst auf die Höhe $h$ gehoben worden war, wird losgelassen. Das System, das hier nur aus dem Körper besteht, ist dann abgeschlossen; es muß (5.19) gelten, wenn man die beiden Zustände (1), d. h. Körper auf der Höhe $h$, und (2), d. h. Körper auf der Höhe $s$, betrachtet:

$$E_p^{(1)} + E_k^{(1)} = E_p^{(2)} + E_k^{(2)} = E_{ges} = const., \tag{5.22}$$

$$mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgs + \frac{1}{2}mv_2^2 = E_{ges}. \tag{5.23}$$

Wenn man jetzt noch spezifiziert, daß der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = 0$ startet, dann könnte man z. B. die Geschwindigkeit $v = v_2$ auf der Höhe $s$ ausrechnen:

$$v = \sqrt{2g(h-s)}. \tag{5.24}$$

Man kann in Gl. (5.22) die potentiellen Energien auf die linke Seite schreiben und die kinetischen Energien auf der rechten Seite sammeln:

$$E_p^{(1)} - E_p^{(2)} = mgh - mgs = \frac{1}{2}mv^2. \tag{5.25}$$

Das Umschreiben der Terme hat zur Folge, daß man nun die kinetische Energie als etwas äußeres ansieht. Die potentielle Energie des Systems ($\Delta E_p = E_p^{(2)} - E_p^{(1)} < 0$) nimmt ab; die Gewichtskraft verrichtet am Körper Beschleunigungsarbeit.

$$-\Delta E_p = \int_{(1)}^{(2)} \vec{G} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}mv^2. \tag{5.26}$$

In Worten:

*Die Abnahme der potentiellen Energie ist gleich der vom System verrichteten Arbeit.*

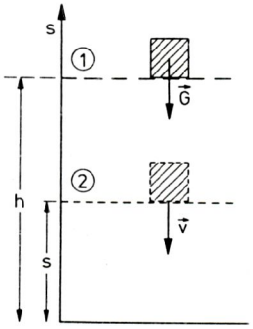


*Fig. 5.7:* Anwendung des Energieerhaltungssatzes auf ein abgeschlossenes System: Ein im Schwerefeld der Erde auf die Höhe $h$ gehobener Körper wird losgelassen.

**Zu Beispiel (b):**

Wieder wird Gl. (5.22) für die beiden in Fig. 5.8 markierten Zustände aufgeschrieben:

$$\frac{1}{2}Dx_0^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv_2^2. \tag{5.27}$$

Wenn man auch hier angibt, mit welcher Geschwindigkeit $v_1$ der Körper starten soll, dann läßt sich wieder die Geschwindigkeit $v = v_2$ für jede Koordinate $x$ ausrechnen; sei z. B. $v_1 = 0$.

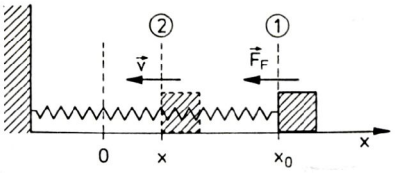


*Fig. 5.8:* Anwendung des Energieerhaltungssatzes: Ein am Ende der gespannten Feder von Fig. 5.5 angebrachter Körper gleitet reibungsfrei auf seiner Unterlage.

$$v = \sqrt{\frac{D(x_0^2 - x^2)}{m}} \tag{5.28}$$

Auch in Gl. (5.27) kann man wie beim vorigen Beispiel die potentiellen Energien links und die kinetischen rechts sammeln:

$$E_p^{(1)} - E_p^{(2)} = \frac{1}{2}mv^2; \tag{5.29}$$

Mithin

$$-\Delta E_p = \int F_x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}mv^2. \tag{5.30}$$

Die potentielle Energie des Systems nimmt ab; das System selbst verrichtet Beschleunigungsarbeit.

## 5.5 Lösung physikalischer Probleme mit dem Energiesatz

Die Beispiele des vorigen Abschnitts haben gezeigt: Ein mechanisches System, das potentielle Energie besitzt, ist fähig, Arbeit zu verrichten. Dies kann man in mathematischer Kurzschrift durch

$$-\mathrm{d}E_p = F \, \mathrm{d}s \tag{5.31}$$

ausgedrücken. Unter der vereinfachenden Annahme, daß $\vec{F}$ und $\mathrm{d}\vec{s}$ parallel gerichtet sind, wurden hier die Vektorpfeile weggelassen. Durch Integration erhält man daraus

$$-\Delta E_p = \int_{(1)}^{(2)} F \, \mathrm{d}s,$$

die den Beziehungen Gl. (5.26) bzw. (5.30) entspricht. Ihre differentielle Form (5.31) läßt sich umschreiben und in Worte fassen:

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}s} \tag{5.32}$$

*Die am System angreifende Kraft erhält man durch das negative Differential der potentiellen Energie.*

**Bemerkung:** Will man ganz exakt sein, dann ist zu beachten, daß $\vec{F}$ und $\mathrm{d}\vec{s}$ Vektoren sind. In der obigen Schreibweise ist $F$ die Komponente der Kraft in Richtung $\mathrm{d}\vec{s}$. Es ist also eine vektorielle Differentiation auszuführen. Man schreibt

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p, \qquad \operatorname{grad} = \text{Gradient}.$$

Der Gradient ist ein Vektoroperator. Er bewirkt mathematisch eine Differentiation und macht aus der skalaren Funktion $E_p$ die vektorielle Funktion $\vec{F}$.

Beispiel:

(a) Lageenergie

$$E_p = mgs \quad \longrightarrow \quad F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}s} = -mg$$

(Gewichtskraft in $-\vec{s}$-Richtung: Fig. 5.4 und 5.7)

(b) Spannenergie

$$E_p = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \longrightarrow \quad F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -Dx$$

(Federkraft in $-\vec{x}$-Richtung: Fig. 5.5 und 5.8)

Die im Abschnitt 4.3 behandelten Beispiele wurden mit Hilfe eines Kraftansatzes gelöst (dynamische Gleichgewichtsbedingung). Nun könnte man auch mit dem Energiesatz zu einer Lösung gelangen. Wir wollen versuchen, die Äquivalenz der beiden Lösungswege zu verdeutlichen. Differenziert man nämlich den Energieerhaltungssatz nach der Wegkoordinate, dann ergibt sich

$$E_p + E_k = const. \quad \Big| \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 0$$

$$-F + mv \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{5.33}$$

Als ersten Term erhält man die von außen angreifende Kraft $F$; den zweiten Term, der sich mit Hilfe der Kettenregel ergibt, kann man noch etwas weiter umformen:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{5.34}$$

Damit verbleibt

$$-F + m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -F + m \cdot a = 0. \tag{5.35}$$

Man kommt also zur dynamischen Kräfte-Gleichgewichts-Bedingung. Verfolgt man den eben gemachten Weg rückwärts, so kann man konstatieren: Energie- und Kraftansatz zur Lösung mechanischer Probleme sind bei *konservativen* Systemen prinzipiell gleichwertig. Der Energieansatz ergibt sich als Wegintegral des Kraftansatzes. Man befindet sich sozusagen einen Schritt näher an der Lösung des Problems; es tritt im Energieansatz nur noch die erste Ableitung der Weg-Zeit-Funktion (nämlich die Geschwindigkeit) auf.

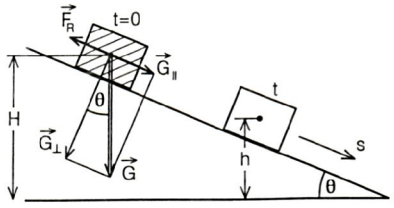


*Fig. 5.9:* Ein Körper gleitet eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel $\theta$ hinab. Die Gewichtskraft $\vec{G}$ läßt sich in ihre Normalkomponente $G_\perp$, die die Gleitreibungskraft $F_R$ bestimmt, und die Hangabtriebskraft $G_\parallel$ zerlegen.

**Beispiel: Klotz auf schiefer Ebene (Fig. 5.9)**

**a) Keine Reibung ($F_R = 0$):**

Das System ist energetisch abgeschlossen; es wirken nur konservative Kräfte; es gilt der Energieerhaltungssatz:

$$E_{ges}(t=0) = E_{ges}(t)$$

$$E_p(0) + E_k(0) = E_p(t) + E_k(t)$$

$$mgH + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2. \tag{5.36}$$

Daraus läßt sich z. B. die Geschwindigkeit $v$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t$ ausrechnen, wenn man die Anfangshöhe $H$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ vorgibt. Diese Geschwindigkeit wächst mit dem zurückgelegten Weg $s = (H-h)/\sin\theta$. Gl. (5.36) kann man umstellen

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(H-h) + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgs \cdot \sin\theta + \frac{1}{2}mv_0^2$$

und nach der Zeit differenzieren

$$mv \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a} = mg\sin\theta \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v}$$

oder

$$m \cdot a = m \cdot g\sin\theta = G_\parallel. \tag{5.37}$$

Das ist aber genau der Kraftansatz zur Lösung des Problems. Klar ist: Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung $a = g\sin\theta$.

**b) Reibung vorhanden ($F_R \neq 0$):**

Wenn Reibungskräfte am Werke sind, ist der Energieerhaltungssatz der Mechanik nicht mehr anwendbar; das System kann gegen den Abfluß von Wärme nicht abgeschlossen werden. Man muß also gleich zum Kraftansatz greifen, in dem man die Reibungskräfte berücksichtigen kann. Für die Beschleunigung des Körpers ist jetzt nur noch die Kraft $G_\parallel - F_R$ wirksam:

$$m \cdot a = mg \cdot \sin\theta - F_R.$$

Nimmt man eine konstante, der Normalkraft proportionale Reibungskraft, etwa

$$F_R = \mu \cdot G_\perp = \mu \cdot mg \cdot \cos\theta,$$

dann erhält man für die Beschleunigung jetzt

$$a = g \cdot (\sin\theta - \mu \cdot \cos\theta). \tag{5.38}$$

Sie ist wieder konstant, aber kleiner als im Fall fehlender Reibung. Aus ihr läßt sich die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt wieder problemlos ermitteln.

Natürlich kann man bei der Lösung dieses Problems auch den Energiesatz anwenden, wenn man die von der Reibungskraft verrichtete (und vernichtete) Arbeit $\Delta W = \int F_R \, ds = F_R \cdot s$ mit in Rechnung stellt:

$$E_{ges}(t=0) - E_{ges}(t) = \Delta W$$

$$\left(MgH + \frac{1}{2}mv_0^2\right) - \left(mgh + \frac{1}{2}mv^2\right) = F_R \cdot s, \qquad (5.39)$$

woraus man wieder die Geschwindigkeit $v(t)$ oder wie oben durch Differentiation die Beschleunigung erhält (5.38).

## 5.6 Zusammenfassung

| | | |
|---|---|---|
| Arbeit | $W = \int \vec{F} \, d\vec{s}$ | $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ (bei $\vec{F} = const.$) |
| Energiesatz | $\Delta W = \int \vec{F}_a \, d\vec{s} = \Delta E_p + \Delta E_k$ | $\vec{F}_a$: äußere Kraft |
| Energieerhaltungssatz | $\Delta E_p + \Delta E_k = 0$ <br> $E_p + E_k = const.$ | abgeschlossene Systeme <br> $\Delta W = 0$ |
| potentielle Energien | Lageenergie <br> $E_p = mgh$ | Spannenergie <br> $E_p = \frac{1}{2}Dx^2$ |
| kinetische Energie | $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ | |