Runde 10, Beispiel 70

LVA 118.181, Übungsrunde 10, 19.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.01.2007

1 Angabe

Unter Verwendung des Fourier-Integraltheorems und der in der Vorlesung hergeleiteten Transformierten des Rechteckimpulses zeige man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} e^{-i\omega x} \,\mathrm{d}\,\omega = \begin{cases} \pi, & \forall\,|x| < 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \forall\,|x| = 1 \\ 0, & \forall\,|x| > 1 \end{cases}$$

Was ergibt das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} \,\mathrm{d}\,\omega$?

1.1 Theoretische Grundlagen: Absolute Integrierbarkeit, Fourier-Integraltheorem

Eine Funktion $f(t)$ heisst **absolut integrierbar**, wenn sie in jedem endlichen Intervall stückweise stetig ist und wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \,\mathrm{d}\,t < \infty$$

Satz: Falls eine Funktion $f(t)$ absolut integrierbar ist, dann existiert die $\mathcal{F}$-transformierte $F(\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$; $F(\omega)$ ist stetig und beschränkt.
Satz: **Fourier-Integraltheorem**: Ist die Funktion $f(t)$ absolut integrierbar und ist $f(t)$ auf jedem endlichen Intervall stückweise stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\frac{f(t)^+ f(t)^-}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \,\mathrm{d}\,\omega$$

Falls $f(t)$ stetig ist gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \,\mathrm{d}\,\omega = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(-\omega)\}$$

2 Lösung des Beispiels

2.1 Als der UE-Stunde Kuba

Wir betrachten den Rechteckimpuls:

$$\sqcap := \begin{cases} 1, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Wir berechnen nun die Spektralfunktion:

$$\mathcal{F}\{\sqcap(t)\} = \int_{-1}^{1} e^{-\omega t}\,\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) =$$

$$\frac{1}{\omega}(\cos(\omega) - i\sin(\omega) - \cos(\omega) - i\sin(\omega)) = \begin{cases} 2\frac{\sin\omega}{\omega}, & t \neq 0 \\ 2, & t = 0 \end{cases}$$

Was ergibt das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\,\omega$?

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega = \cdots = \frac{1}{pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}\,\omega$$

Es gilt:

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{\sin(a+b) - sin(a-b)}{2}$$

Und somit kann man das Ergebnis weiter vereinfachen:

$$\frac{1}{pi}\int_0^\infty \frac{\sin(t+1)}{\omega}\,\mathrm{d}\,\omega + \frac{1}{pi}\int_0^\infty \frac{\sin(1-t)}{\omega}\,\mathrm{d}\,\omega$$

Mit einfacher Endrechnung (nicht ausgeführt).

2.2 Aus der UE-Stunde Panholzer

Substituiere $\omega = -v$: :: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(-v)}{-v} e^{-i(-v)x}\,\mathrm{d}(-v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin v}{v} e^{ivx}\,\mathrm{d}\,v$ ($\blacklozenge$)
Aus der Übung ist bekannt:

$$\mathcal{F}\{\sqcap(t)\} = 2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

Wobei

$$\sqcap(t) = \begin{cases} 1, & \forall\,|x| \leq 1 \\ 0, & \forall\,|x| > 1 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\frac{\sin\omega}{\omega}\} = \frac{1}{2}\sqcap(t)$$

Man betrachte das Fourier-Integraltheorem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{f(t)\}e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\,\omega = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Damit können wir ($\blacklozenge$) weiter umformen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin v}{v} e^{ivx}\,\mathrm{d}\,v = 2\pi\frac{\frac{1}{2}\sqcap(t^+) + \frac{1}{2}\sqcap(t^-)}{2} = \frac{\pi}{2}(\sqcap(t^+) + \sqcap(t^-))$$

Da $\sqcap(t) = 1$ für $|t| \leq 1$ und $\sqcap(t) = 0$ für $|t| > 0$ ist, kann man sich leicht davon überzeugen, daß das der gesuchten Funktion entspricht:

- $t \in (-1, 1) : \frac{\pi}{2}(\sqcap(t^+) + \sqcap(t^-)) = \frac{\pi}{2}(1 + 1) = \pi$
- $t \in \{-1; 1\} : \frac{\pi}{2}(\sqcap(t^+) + \sqcap(t^-)) = \frac{\pi}{2}(0 + 1) = \frac{\pi}{2}$
- $t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) : \frac{\pi}{2}(\sqcap(t^+) + \sqcap(t^-)) = \frac{\pi}{2}(0 + 0) = \frac{\pi}{2}$